Építőmérnöki Matematika MSc vizsga; 2022.01.18. 9:10–10:40. Minden feladat 15 pont.

1. Az $u(x,t)$ függvény **véges** rezgő húr egyenletét teljesíti:
   $u''_{tt} = 4u''_{xx}$ ha $0 \le x \le 6,\ t \ge 0$; $\quad u(0,t) = u(6,t) = 0$ ha $t \ge 0$;
   $$u(x,0) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 2 \\ 2 & 2 \le x \le 4, \\ 6-x & 4 \le x \le 6; \end{cases} \quad \text{és} \quad u'_t(x,0) = 0.$$
   Határozza meg **d'Alambert módszerével** $u(1,1)$ értékét!

2. A $\mathbf{v}$ vektor koordinátái a természetes bázisban $[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Határozza meg $\mathbf{v}$ koordinátáit a $B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ bázisban, vagyis $[\mathbf{v}]_B =$?

3. Határozza meg a $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix szinguláris értékeit!

4. Tekintse az $\overrightarrow{F}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{F}(x,y) = (-3(x^2+y^2)y, 3(x^2+y^2)x)$ vektormezőt. (a) Síkbeli Curl-teszt segítségével döntse el, potenciálos-e $\overrightarrow{F}(\mathbf{r})$. (b) Határozza meg az $\int\limits_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ vonalintegrált a $\gamma : \mathbf{r}(t) = (4\cos t, 4\sin t);\ 0 \le t \le 2\pi$ görbe mentén!

5. Jelölje $\mathcal{F}$ a $K = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 2\}$ téglatestet határoló zárt felületet, kifelé irányítva. Tekintse továbbá a $\overrightarrow{G}(x,y,z) = \left(x + e^{y^2}\sin(z), 2yz + \cos(x^3), z^2\right)$ vektormezőt, és a Gauss tétel segítségével határozza meg a $\iint\limits_{\mathcal{F}} \overrightarrow{G} d\overrightarrow{A}$ felületi integrált!

6. $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^2+y, z^2+xy, y^2z)$ egy folyadékáramlás időben állandó sebességtere. Egy kis lapátkereket helyezünk $P = (-1,2,0)$ centrummal az áramlás útjába. Hogyan kell választani a lapátkerék síkjának $\overrightarrow{n}$ egységhosszú normálvektorát ahhoz, hogy a lapátkerékre nézve a $-\overrightarrow{n}$ (mínusz $\overrightarrow{n}$) irányból, az
   (a) a lehető leggyorsabban forogjon az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányba?
   (b) egyáltalán ne forogjon?