Építőmérnöki Matematika MSc vizsga 2020. január 7-én 9.10-től 10.40-ig

1. Az $u(x,t)$ függvény **végtelen** rezgő húr egyenletét teljesíti: $u_{tt} = 4u_{xx}$ $(t > 0, x \in \mathbb{R})$,
   $u(x,0) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ és $u_t(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$ $u(0,2) = ?$

2. Keressük meg a $(-1,1), (0,5), (1,4)$ és $(4,0)$ pontokra legkisebb négyzetes értelemben legjobban illeszkedő egyenes egyenletét.

3. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 6/5 & 8/5 \end{bmatrix}$ mátrix szinguláris érték felbontását.

4. Tekintsük az $\overrightarrow{F}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{F}(x,y,z) = (2xyz, x^2z+2y, x^2y-3z^2)$ vektormezőt. (a) Döntsük el, potenciálos-e $\overrightarrow{F}(\mathbf{r})$. (b) Legyen γ a $C = (0,1,1)$ pontból induló, $D = (1,0,2)$ pontban végződő egyenes szakasz. Határozzuk meg a $\int_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ vonalintegrált.

5. Legyen $\overrightarrow{G}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{G}(x,y,z) = (x^3 + e^{z^2+y^2}, e^x z + y^3, \cos(x)\sin(y) + z^3 + xy)$, és $\mathcal{F}$ az egységsugarú, origó körüli gömb felülete, kifelé mutató normálissal irányítva. Számítsuk ki Gauss tétel segítségével a $\iint_{\mathcal{F}} \overrightarrow{G} d\overrightarrow{A}$ felületi integrált (Segítség: a Képletgyüjtemény utolsó pontja a gömbi koordinátás helyettesítés.)

6. $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xy, x^2+z^2, x+z)$ egy folyadékáramlás időben állandó sebességtere. Egy kis lapátkereket helyezünk $P = (1,2,3)$ centrummal az áramlás útjába. Hogyan kell választani a lapátkerék síkjának $\overrightarrow{n}$ normálvektorát ahhoz, hogy a lapátkerékre nézve a $-\overrightarrow{n}$ (mínusz $\overrightarrow{n}$) irányból, az a lehető leggyorsabban forogjon az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányba?

Építőmérnöki Matematika MSc vizsga 2020. január 7-én 9.10-től 10.40-ig

1. Az $u(x,t)$ függvény **végtelen** rezgő húr egyenletét teljesíti: $u_{tt} = 4u_{xx}$ $(t > 0, x \in \mathbb{R})$,
   $u(x,0) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ és $u_t(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$ $u(0,2) = ?$

2. Keressük meg a $(-1,1), (0,5), (1,4)$ és $(4,0)$ pontokra legkisebb négyzetes értelemben legjobban illeszkedő egyenes egyenletét.

3. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 6/5 & 8/5 \end{bmatrix}$ mátrix szinguláris érték felbontását.

4. Tekintsük az $\overrightarrow{F}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{F}(x,y,z) = (2xyz, x^2z+2y, x^2y-3z^2)$ vektormezőt. (a) Döntsük el, potenciálos-e $\overrightarrow{F}(\mathbf{r})$. (b) Legyen γ a $C = (0,1,1)$ pontból induló, $D = (1,0,2)$ pontban végződő egyenes szakasz. Határozzuk meg a $\int_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ vonalintegrált.

5. Legyen $\overrightarrow{G}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{G}(x,y,z) = (x^3 + e^{z^2+y^2}, e^x z + y^3, \cos(x)\sin(y) + z^3 + xy)$, és $\mathcal{F}$ az egységsugarú, origó körüli gömb felülete, kifelé mutató normálissal irányítva. Számítsuk ki Gauss tétel segítségével a $\iint_{\mathcal{F}} \overrightarrow{G} d\overrightarrow{A}$ felületi integrált (Segítség: a Képletgyüjtemény utolsó pontja a gömbi koordinátás helyettesítés.)

6. $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xy, x^2+z^2, x+z)$ egy folyadékáramlás időben állandó sebességtere. Egy kis lapátkereket helyezünk $P = (1,2,3)$ centrummal az áramlás útjába. Hogyan kell választani a lapátkerék síkjának $\overrightarrow{n}$ normálvektorát ahhoz, hogy a lapátkerékre nézve a $-\overrightarrow{n}$ (mínusz $\overrightarrow{n}$) irányból, az a lehető leggyorsabban forogjon az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányba?