Építőmérnöki Matematika MSc vizsga 2020. január 28-án 9.10-től 10.40-ig

1. Az $u_{tt} = u_{xx}$ egyenlet adja meg egy végtelen hosszú húr rezgését. Tudjuk, hogy $u(x,0) \equiv 0$ és $u_t(x,0) = \sin x$. Kérdés $u(x,t) =?$

2. A $\mathbf{v}$ vektor koordinátái a természetes bázisban $[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg $\mathbf{v}$ koordinátáit a $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$ bázisban, vagyis $[\mathbf{v}]_B =?$

3. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit, sajátvektorait, majd az e^{-A} mátrixot.

4. Tekintsük az $\overrightarrow{F}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{F}(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ vektormezőt. (a) Síkbeli Curl-teszt segítségével döntsük el, potenciálos-e $\overrightarrow{F}(\mathbf{r})$. (b) Határozzuk meg az $\int_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ vonalintegrált a $\gamma : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t);\ 0 \le t \le 2\pi$ görbe mentén.

5. Legyen $\mathcal{F}$ az $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1, 0 \le z\}$, **félgömb** felülete, kifelé mutató normálissal irányítva, továbbá tekintsük a $\overrightarrow{G}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{G}(x,y,z) = (\cos(z^2+y^2), e^{-6x} + 3y, 2z+1)$ vektormezőt. Határozzuk meg a Gauss tétel segítségével az $\iint_{\mathcal{F}} \overrightarrow{G}\, d\overrightarrow{A}$ felületi integrált! (Figyelem, $\mathcal{F}$ nem tartalmazza a félgömböt lezáró körlapot!)

6. Tekintsük a síkon az $r(\varphi) = 1 + \cos\varphi;\ -\pi \le \varphi < \pi$ polárkoordinátás alakban adott zárt görbét, és határozzuk meg a görbe által határolt tartomány területét.

Építőmérnöki Matematika MSc vizsga 2020. január 28-án 9.10-től 10.40-ig

1. Az $u_{tt} = u_{xx}$ egyenlet adja meg egy végtelen hosszú húr rezgését. Tudjuk, hogy $u(x,0) \equiv 0$ és $u_t(x,0) = \sin x$. Kérdés $u(x,t) =?$

2. A $\mathbf{v}$ vektor koordinátái a természetes bázisban $[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg $\mathbf{v}$ koordinátáit a $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$ bázisban, vagyis $[\mathbf{v}]_B =?$

3. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit, sajátvektorait, majd az e^{-A} mátrixot.

4. Tekintsük az $\overrightarrow{F}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{F}(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ vektormezőt. (a) Síkbeli Curl-teszt segítségével döntsük el, potenciálos-e $\overrightarrow{F}(\mathbf{r})$. (b) Határozzuk meg az $\int_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ vonalintegrált a $\gamma : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t);\ 0 \le t \le 2\pi$ görbe mentén.

5. Legyen $\mathcal{F}$ az $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1, 0 \le z\}$, **félgömb** felülete, kifelé mutató normálissal irányítva, továbbá tekintsük a $\overrightarrow{G}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{G}(x,y,z) = (\cos(z^2+y^2), e^{-6x} + 3y, 2z+1)$ vektormezőt. Határozzuk meg a Gauss tétel segítségével az $\iint_{\mathcal{F}} \overrightarrow{G}\, d\overrightarrow{A}$ felületi integrált! (Figyelem, $\mathcal{F}$ nem tartalmazza a félgömböt lezáró körlapot!)

6. Tekintsük a síkon az $r(\varphi) = 1 + \cos\varphi;\ -\pi \le \varphi < \pi$ polárkoordinátás alakban adott zárt görbét, és határozzuk meg a görbe által határolt tartomány területét.