Építőmérnöki Matematika MSc vizsga 2020. január 14-én 9.10-től 10.40-ig

1. Határozzuk meg az $u(x,t)$ függvényt, ha $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < t, 0 < x < \pi \\ u(x,0) = \sin 3x - \sin 5x, & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = \begin{cases} 7, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0, \pi \end{cases} & \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0 & 0 < t \end{cases}$

   (Segítség: képletgyűjtemény, 2. oldal, 5/(c) képlet.)

2. Legyen $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg a $col(A)$ altér (a) dimenzióját, és (b) adjuk meg egy bázisát.

3. Mutassuk meg, hogy az $A = \begin{bmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 3/2 & 5/2 \end{bmatrix}$ mátrix pozitív definit, majd keressük meg azt a B pozitív definit mátrixot, melyre $A = B^2$.

4. Tekintsük az $\overrightarrow{F}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{F}(x,y,z) = (2xy + 2xz, x^2 + z, x^2 + y)$ vektormezőt. (a) Döntsük el, potenciálos-e $\overrightarrow{F}(\mathbf{r})$. (b) Legyen γ a $C = (0,0,0)$ pontból induló, $D = (0,1,1)$ pontban végződő egyenes szakasz. Határozzuk meg a $\int_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ vonalintegrált.

5. Legyen $\mathcal{F}$ az ABC háromszög, felfelé mutató normálissal, ahol $A(3,1,7)$; $B(5,1,7)$; $C(3,4,7)$. Legyen továbbá $\overrightarrow{F} = (-3,2,1)$ konstans vektormező. Számoljuk ki a $\iint_{\mathcal{F}} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{A}$ felületi integrált!

6. Határozzuk meg a $\overrightarrow{G}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{G}(x,y) = (7y, 10x)$ síkbeli vektormező vonalintegrálját az $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 9$ körvonal mentén. (Segítség: lehet definíció szerint is, de gyorsabb Green tételt használva.)