**Építőmérnöki Matematika MSc, gyakorló feladatok a 2. ED-re**

1. Határozzuk meg az $u(x,t)$ függvényt, ha $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < t, 0 < x < \pi \\ u(x,0) = \sin 3x - \sin 5x, & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = \begin{cases} 7, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0, \pi \end{cases} & \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0 & 0 < t \end{cases}$
(Segítség: képletgyűjtemény, 2. oldal, 5/(c) képlet.)

2. Határozza meg azt az $u(x,t)$ függvényt, amely az alábbi rezgő húr probléma megoldása:
$$\begin{cases} u''_{tt}(x,t) = 9u''_{xx}(x,t) & x \in [0,2], t \ge 0 \\ u(x,0) = 0 & x \in [0,2] \\ u'_t(x,0) = \sin(\frac{\pi}{2}x)\cos(\frac{3\pi}{2}x) + \sin(2\pi x) & x \in [0,2] \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 & t \ge 0 \end{cases}$$

3. Az $u(x,t)$ függvény **végtelen** rezgő húr egyenletét teljesíti: $u_{tt} = 4u_{xx}$ $(t > 0, x \in \mathbb{R})$,
$u(x,0) = 0\ (x \in \mathbb{R})$ és $u_t(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$ $u(0,2) = ?$

4. Az $u(x,t)$ függvény **véges** rezgő húr egyenletét teljesíti:
$u''_{tt} = 4u''_{xx}$ ha $0 \le x \le 6,\ t \ge 0$; $u(0,t) = u(6,t) = 0$ ha $t \ge 0$;
$u(x,0) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 2 \\ 2 & 2 \le x \le 4, \\ 6 - x & 4 \le x \le 6; \end{cases}$ és $u'_t(x,0) = 0.$
Határozza meg **d'Alambert módszerével** $u(1,1)$ értékét!

5. Tekintse az alábbi *hővezetési problémát.* Határozza meg az $u(x,t)$ függvényt!
$$\begin{array}{ll} u'_t = 4u''_{xx} & 0 \le x \le 3, t \ge 0; \\ u(0,t) = u(3,t) = 0 & t \ge 0; \\ u(x,0) = \sin(\pi x) + \cos(\frac{\pi}{3}x)\sin(\frac{2\pi}{3}x) & 0 \le x \le 3. \end{array}$$

6. Tekintsük az $\overrightarrow{F}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{F}(x,y,z) = (2xyz, x^2z + 2y, x^2y - 3z^2)$ vektormezőt. (a) Döntsük el, potenciálos-e $\overrightarrow{F}(\mathbf{r})$. (b) Legyen $\gamma$ a $C = (0,1,1)$ pontból induló, $D = (1,0,2)$ pontban végződő egyenes szakasz. Határozzuk meg a $\int\limits_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ vonalintegrált.

7. Tekintse az $\overrightarrow{F}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{F}(x,y) = (-3(x^2+y^2)y, 3(x^2+y^2)x)$ vektormezőt. (a) Síkbeli Curl-teszt segítségével döntse el, potenciálos-e $\overrightarrow{F}(\mathbf{r})$. (b) Határozza meg az $\int\limits_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ vonalintegrált a $\gamma : \mathbf{r}(t) = (4\cos t, 4\sin t);\ 0 \le t \le 2\pi$ görbe mentén!

8. Tekintsük az $\overrightarrow{F}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{F}(x,y,z) = \big(2xy + 2xz, x^2 + z, x^2 + y\big)$ vektormezőt. (a) Döntsük el, potenciálos-e $\overrightarrow{F}(\mathbf{r})$. (b) Legyen $\gamma$ a $C = (0,0,0)$ pontból induló, $D = (0,1,1)$ pontban végződő egyenes szakasz. Határozzuk meg a $\int\limits_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ vonalintegrált.

9. Tekintse az $\overrightarrow{F}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{F}(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ vektormezőt. (a) Síkbeli Curl-teszt segítségével döntse el, potenciálos-e $\overrightarrow{F}(\mathbf{r})$. (b) Határozza meg az $\int\limits_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ vonalintegrált a $\gamma : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t);\ 0 \le t \le 2\pi$ görbe mentén!

10. Tekintse a $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \big(2xyz + e^{xy}y, x^2z + e^{xy}x, x^2y + 2z\big)$ vektormezőt.
    (a) Curl-teszt alapján döntse el, konzervatív-e $\overrightarrow{F}$! Amennyiben igen, határozza meg a potenciált!
    (b) Jelölje $\gamma$ a 2 sugarú zárt körvonalat, az $(1,1,1)$ pont körül, az $xy$ síkkal párhuzamos síkban. $\int_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r} = ?$

11. Tekintse a $\overrightarrow{G}(x,y,z) = (x - y, x + y, z)$ vektormezőt, valamint az
$\mathcal{F} : \mathbf{r}(u,v) = (u, v, 3u - 4v);\ 0 \le u \le 1; 0 \le v \le 1$ felületet, **lefelé mutató** normálvektorral.
Számolja ki az $\iint\limits_{\mathcal{F}} \overrightarrow{G} d\overrightarrow{A}$ felületi integrált!

12. Legyen $\mathcal{F}$ az $ABC$ háromszög, felfelé mutató normálissal, ahol $A(2,-1,5)$; $B(5,-1,5)$; $C(2,1,5)$. Legyen továbbá $\overrightarrow{F} = (1,4,-3)$ konstans vektormező. Számoljuk ki a $\iint\limits_{\mathcal{F}} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{A}$ felületi integrált!