Matematika A2a - Vektorfüggvények, 2023/2024/2. félév

Gyakorló feladatok

1. Gyakorlat: Improprius integrálok

1. Feladat (Improprius integrálok típusa, konvergenciája, kiszámítása):

Mondjuk meg, melyik típusba tartoznak az alábbi improprius integrálok? Számítsuk ki őket és állapítsuk meg, hogy konvergensek vagy divergensek!

a) $\int_2^\infty \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$;

b) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$;

c) $\int_0^\infty \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

2. Feladat (Egy valószínűségszámításban tekintett alkalmazás: Az egyenletes eloszlás várható értékének kiszámítása):

Az X *egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye*:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a},\ \text{ha } x\in[a,b]\\ 0,\ \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus[a,b].\end{cases}$$

Ábrázoljuk az f függvényt! Számítsuk ki az

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

képlettel megadott *várható értéket*!

3. Feladat (Improprius integrál geometriai jelentése):

Számítsuk ki a következő improprius integrált:

$$\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x.$$

Mi ennek a geometriai jelentése? Készítsünk ábrát is!

4. Feladat (Konvergens vagy divergens?):

Számítsuk ki a következő improprius integrált:

$$\int_1^{\infty} \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Konvergens vagy divergens ez az integrál? Készítsen ábrát is!

5. Feladat (Hányadosteszt alkalmazása):

Hányadosteszt segítségével vizsgáljunk konvergenciát az

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{100}}$$

improprius integrál esetében! (Érték kiszámítása nem szükséges.)

<u>*Útmutatás*</u>: Előadáson vettük az 1. típusú, pozitív integrandusú improprius integrálokra vonatkozó *Hányadosteszt*et:
Ha $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ folytonos pozitív függvények és

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0 \text{ véges szám,}$$

akkor az $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ és $\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ improprius integrálok *ekvikonvergensek*, azaz egyszerre konvergensek, vagy egyszerre divergensek.

2. Gyakorlat: Improprius integrálok (folytatás). Komplex számok. Műveletek komplex számokkal. Egyenletek megoldása a komplex számhalmazon

6. Feladat (Improprius integrálok kiszámításának begyakorlása):

Mondjuk meg, melyik típusba tartoznak az alábbi improprius integrálok! Számítsuk ki őket és állapítsuk meg, hogy konvergensek vagy divergensek!

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$;

b) $\int_3^\infty \frac{2}{x^2-2x}\,\mathrm{d}x$;

c) $\int_{-2}^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-x}}$.

7. Feladat (Műveletek komplex számokkal):

Adjuk meg a következő komplex számok algebrai alakját!

a) $z_1 = \frac{2-\mathrm{i}}{3\mathrm{i}+\overline{(2+\mathrm{i})^2}}$;

b) $z_2 = \frac{2+\mathrm{i}}{3\mathrm{i}+\overline{(1-\mathrm{i})^2}}$;

c) $z_3 = (-\sqrt{3}+\mathrm{i})^{20}$.

8. Feladat (Komplex számok - a komplex számsík pontjai):

A sík mely pontjaira teljesül, hogy $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$?

($\operatorname{Re}\frac{1}{z}$ az $\frac{1}{z}$ komplex szám *valós részét* jelöli.)

9. Feladat (Komplex n-edik gyökök használata egyenletek megoldásakor, I.):

Oldjuk meg a

$$z^7 - z = 0$$

egyenletet a komplex számok halmazán! A megoldásokat algebrai alakban kérjük! Hol helyezkezdnek el a síkon ezek a megoldások?

10. Feladat (Másodfokú egyenlet megoldóképletének használata):

Oldjuk meg a

$$z^3 - z^2 + 4z = 0$$

egyenletet a komplex számok halmazán! A megoldásokat algebrai alakban kérjük!

11. Feladat (OPCIONÁLIS: i hatványainak használata):

Számítsuk ki az

$$\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \ldots + \mathrm{i}^{2020}$$

értékét!

12. Feladat (OPCIONÁLIS: Komplex n-edik gyökök használata egyenletek megoldásakor, II.):

Oldjuk meg a

$$z^4 + 8 - 8\sqrt{3}\,\mathrm{i} = 0$$

egyenletet a komplex számok halmazán! A megoldásokat algebrai alakban is kérjük!

3. Gyakorlat: Lineáris algebra: Vektorok. Skaláris szorzat, vektoriális szorzat és alkalmazásaik. Sík egyenlete. Egyenes egyenletrendszere. Vektorok lineáris függetlensége a rendezett szám n-esek vektorterében

13. Feladat (Vektorok hajlásszöge; skaláris szorzat):

Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (3, 1, -1)$ és $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$ vektorok skaláris szorzatát és a két vektor hajlásszögét!

14. Feladat (Vektor felbontása adott vektorral párhuzamos és arra merőleges vektorok összegére):

Bontsuk fel a $\mathbf{v} = (1, 2, 5)$ vektort az $\mathbf{a} = (1, 3, 2)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges vektorok összegére!

15. Feladat (Vektoriális szorzat; háromszög területének kiszámítása):

Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 3, 5)$ és $\mathbf{b} = (4, 7, 0)$ vektorok vektoriális szorzatát, valamint az $A(0, 0, 0)$, $B(1, 3, 5)$ és $C(4, 7, 0)$ csúcspontú háromszög területét!

16. Feladat (Adott ponton átmenő, adott normálvektorú sík egyenlete; pont távolsága a síktól):

Írjuk fel a $P_0(3,4,6)$ ponton átmenő, $\mathbf{n} = (1,-2,1)$ normálvektorú sík egyenletét és számítsuk ki a $Q(1,2,3)$ pontnak ettől a síktól vett távolságát!

17. Feladat (Két sík távolsága):

Mutassuk meg, hogy a $2x+y-z=1$ és a $4x+2y-2z=1$ síkok párhuzamosak és határozzuk meg a két sík távolságát!

18. Feladat (Két adott ponton átmenő egyenes paraméteres egyenletrendszere):

Írjuk fel az $A(1,2,0)$ és $B(1,3,-2)$ pontokon áthaladó egyenes paraméteres egyenletrendszerét!

19. Feladat (Vektorok lineáris függetlensége):

Döntsük el, hogy a következő vektorok lineárisan függetlenek-e vagy nem! (Itt még nem használjuk a Gauss-módszert, a középiskolában tanult módszereket használjuk a feladatban előforduló egyszerű egyenletrendszerek megoldásánál.)

a)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 13 \\ 10 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

20. Feladat (OPCIONÁLIS: Vegyes szorzat; kifeszített paralelepipedon térfogata):

Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (2,-1,5)$, $\mathbf{b} = (-1,0,4)$ és $\mathbf{c} = (0,2,-3)$ vektorok ebben a sorrendben tekintett vegyes szorzatát, valamint a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát!

21. Feladat (OPCIONÁLIS: Adott ponton átmenő, adott egyenesre merőleges sík egyenlete; sík és egyenes döféspontja):

Határozzuk meg a $P_0(-2,-1,8)$ ponton átmenő és az

$$x+1=-\frac{y}{2}=\frac{3-z}{3}$$

egyenletrendszerű egyenesre merőleges sík egyenletét, és ennek a síknak az egyenessel való döféspontját!

4. Gyakorlat: Lineáris algebra (folytatás): Lineáris tér altere. Bázis. Altér dimenziója. Mátrixok. Műveletek mátrixokkal

22. Feladat (Altér dimenziója, bázisa, I.):

Mutassuk meg, hogy az

$$\mathcal{M} := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | \quad 3x-2y=4z\}$$

az $\mathbb{R}$ feletti $(\mathbb{R}^3,+,.)$ lineáris tér egy altere! (A „·" jel számmal történő szorzást jelöl.)
Mennyi ennek az $\mathcal{M}$ altérnek a dimenziója?
Adjuk meg az $\mathcal{M}$ altér egy bázisát!

23. Feladat (Altér dimenziója, bázisa, II.):

Igazoljuk, hogy az

$$M := \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 | \quad x_1+3x_2=5x_3-x_4\}$$

az $\mathbb{R}$ feletti $(\mathbb{R}^4,+,.)$ lineáris tér egy altere! (A „·" jel számmal történő szorzást jelöl.)
Hány dimenziós ez az M altér?
Adjuk meg ennek az altérnek egy bázisát!

24. Feladat (Lineáris függetlenség vizsgálata):

Tekintsük az $\mathbb{R}$ feletti $(\mathbb{R}^3, +, .)$ lineáris tér $\mathbf{a} = (1,2,3)$, $\mathbf{b} = (0,0,0)$ és $\mathbf{c} = (-1,2,4)$ vektorait. Lineárisan független-e az ezekből a vektorokból álló vektorrendszer? Miért?

25. Feladat (Vektor adott bázisra vonatkozó koordinátái):

Igazoljuk, hogy a

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{b_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \mathbf{b_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

vektorrendszer bázist alkot az $\mathbb{R}$ feletti $(\mathbb{R}^3, +, .)$ lineáris térben és írjuk fel a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektort ezen bázisvektorok lineáris kombinációjaként! Adjuk meg a $\mathbf{v}$ vektornak a $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátáit! (Még ne használjunk Gauss-módszert az egyenletrendszer megoldásakor.)

<u>*Útmutatás*</u>: Elegendő belátni, hogy a vektorok lineárisan függetlenek, mert az $(\mathbb{R}^3, +, .)$ lineáris térben 3 lineárisan független vektor bázist alkot. A lineáris függetlenség bebizonyítása után a $\mathbf{v}$ vektornak a $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátáit a

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

felírása után számítjuk ki. Ekkor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$, azaz λ_1, λ_2 és λ_3 kiszámítása után $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

26. Feladat (Mátrixműveletek):

Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ és

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$.
Számítsuk ki az $\mathbf{A}^T$, $-\mathbf{A}$, $5\mathbf{A}$, $\mathbf{B} - 5\mathbf{A}$ mátrixokat!
Végezzük el az $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ mátrix szorzások közül azokat, amelyeket lehetséges!

27. Feladat (OPCIONÁLIS: Egy másodrendű mátrix negyedik hatványa):

Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & a \end{bmatrix}$, ahol $a \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzített valós szám. Számítsuk ki az $\mathbf{A}^4$ mátrixot!

Útmutatás: Mivel a mátrixok szorzása asszociatív, elegendő az $\mathbf{A}^2$ mátrixot kiszámítani, majd azt négyzetre emelni. Amennyiben a hatványkitevő egy nagy pozitív egész szám lenne, ezt a módszert nem használhatnánk. Nagy kitevő esetén már a mátrixok diagonalizálását is ismernünk kell, amit később tanulunk.

28. Feladat (OPCIONÁLIS: Ritkán lehet a mátrixok szorzása is kommutatív):

Határozzuk meg mindazokat a $\mathbf{B}$ mátrixokat, amelyek esetében az
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixszal való szorzás kommutatív!
(*Jegyezzük meg, hogy általában a mátrixok szorzása nem kommutatív!*)

5. Gyakorlat: Determinánsok. Mátrix rangja. Inverz mátrix. Mátrixegyenletek

29. Feladat (Determinánsok kiszámítása):

Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát:

a) $\begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{bmatrix}$.

30. Feladat (Vektorrendszer rangja; generált altér dimenziója; altér egy bázisa):

Határozzuk meg az

$$\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix},\ \mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{a_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

vektorok által alkotott vektorrendszer rangját! Mennyi a generált altér dimenziója? Adjuk meg ennek az altérnek egy bázisát!

31. Feladat (Paramétert tartalmazó mátrix invertálhatósága; inverz mátrix kiszámítása adjungált mátrix segítségével):

Mely $\lambda \in \mathbb{R}$ paraméterekre invertálható az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix? Számítsuk ki $\lambda = 1$ esetén az inverz mátrixot az adjungált mátrix segítségével!

32. Feladat (Inverz mátrix kiszámítása elemi sorműveletek segítségével):

Számítsuk ki a

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét elemi sorműveletek segítségével!

33. Feladat (Mátrixegyenlet megoldása):

Határozza meg az összes olyan $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyre

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{C} + (\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{X}$$

teljesül, ahol

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -10 & -2 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Gyakorlat: Lineáris egyenletrendszerek. Gauss-módszer. Gauss-Jordan módszer. Cramer-szabály

34. Feladat (Gauss-Jordan módszer vagy Gauss-Jordan elimináció, I.):

Oldjuk meg Gauss-Jordan módszerrel az alábbi lineáris egyenletrendszert! (Azaz kérjük az elemi sorműveletek használatát a redukált lépcsős alakig!)

$$\begin{cases} x + y + 2z = & -1 \\ 2x - y + 2z = & -4 \\ 4x + y + 4z = & -2. \end{cases}$$

<u>*Útmutatás*</u>: *Gauss-módszerrel* a *lépcsős alakig* megyünk el, ez olyan $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$-vel ekvivalens mátrix, melyben a főátló alatt csupa nulla van, és melyben teljes nulla sor nem gyártható már le. Lépcsős alakban a csupa 0 sorokat a végére tesszük, vagy akár el is hagyhatjuk, és bármely 2 egymás utáni sor esetén az alsó sorban az elején több 0 van, mint a felső sorban. Tetszőleges sor főeleme nem más, mint a sor első nemzérus eleme.
Ha megelégszünk a lépcsős alakra hozással (Gauss-módszerrel), még szükségünk lesz pár visszahelyettesítésre ahhoz, hogy felírjuk az egyenletrendszer megoldását.
Redukált lépcsős alakhoz további elemi sortranszformációk szükségesek, ez

olyan speciális lépcsős alak, melynek minden sorának főeleme 1, és amelyben a főelemek oszlopaiban a főelemeken kívüli számok mind nullák. A redukált lépcsős alakból már azonnal látszik, melyek a szabad változók és látszik az egyenletrendszer megoldása is. *Gauss-Jordan módszer* a neve annak, mikor redukált lépcsős alakig dolgozunk elemi sortranszformációkkal.

35. Feladat (Gauss-Jordan módszer vagy Gauss-Jordan elimináció, II.; a hozzárendelt homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza; annak egy bázisa):

Oldjuk meg Gauss-Jordan módszerrel az alábbi lineáris egyenletrendszert! (Azaz kérjük az elemi sorműveletek használatát a redukált lépcsős alakig!) Mennyi az együtthatómátrix rangja és az egyenletrendszer szabadságfoka? Írjuk fel a hozzárendelt homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldását és a megoldáshalmaz egy bázisát!

$$\begin{cases} 3x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & & = & 2 \\ 9x_1 & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & -2x_5 & = & 5 \\ x_1 & -x_2 & & -x_4 & +2x_5 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & -3x_4 & +4x_5 & = & 2. \end{cases}$$

36. Feladat (Gauss-módszer vagy Gauss-elimináció, III.):

Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi lineáris egyenletrendszert! (Itt már nem kérjük a redukált lépcsős alakot.)

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 - 5x_3 = & 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = & 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = & 2. \end{cases}$$

37. Feladat (Cramer-szabály):

Oldjuk meg Cramer-szabállyal a

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = & 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = & 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = & 11. \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszert!

38. Feladat (OPCIONÁLIS: Lineáris egyenletrendszer megoldása inverz mátrix módszerrel, Cramer szabállyal, Gauss-eliminációval):

Oldjuk meg az

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 9x_3 = & 20 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = & 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = & 11. \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszert
a) inverz mátrix módszerrel;
b) Cramer-szabállyal;
c) Gauss-eliminációval (redukált lépcsős alakig alakítva a kibővített mátrixot)!

7. Gyakorlat: Paraméteres lineáris egyenletrendszerek. Négyzetes mátrixok sajátértéke, sajátvektora. Diagonalizálás

39. Feladat (Paraméteres lineáris egyenletrendszerek):

A $p, q \in \mathbb{R}$ paraméterek értékétől függően tárgyaljuk és oldjuk meg Gauss-eliminációval a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x & +y & +z = & 2q \\ 2x & -3y & +2z = & 4q \\ 3x & -2y & +pz = & q. \end{cases}$$

40. Feladat (Nem szimmetrikus másodrendű mátrix sajátértékei, sajátvektorai; diagonalizálás):

a) Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (nem szimmetrikus) mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

b) Diagonalizálható-e az $\mathbf{A}$ mátrix? Ha igen, akkor adjon meg egy diagonalizáló mátrixot!

c) Diagonalizálja az A mátrixot!

41. Feladat (Szimmetrikus harmadrendű mátrix sajátértékei, sajátvektorai; diagonalizáló mátrix megadása):

Diagonalizálható-e az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix? Ha igen, akkor adjon meg egy diagonalizáló mátrixot!

42. Feladat (OPCIONÁLIS: Szimmetrikus harmadrendű mátrix ortonormált mátrixszal történő diagonalizálása):

Ortonormált mátrixszal diagonalizáljuk az

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixot!

43. Feladat (OPCIONÁLIS: Mátrixok hatványozása nagy hatványkitevők esetén):

Számítsuk ki az $\mathbf{A}^{1002}$ mátrixot, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

8. Gyakorlat: Többváltozós függvények: Parciális- és iránymenti deriváltak. Érintősík egyenlete

44. Feladat (Síkmetszetek, szintvonalak):

Határozzuk meg az $f(x, y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ függvény grafikonjának a koordinátasíkokkal párhuzamos síkmetszeteit! Szemléltessük az (x, y)-síkban a szintvonalakat! Készítsünk ábrát a felületről!

45. Feladat (Parciális deriváltak, gradiens, érintősík, másodrendű parciális deriváltak, Hesse-mátrix, I.):

Tekintsük az

$$f(x,y) = \frac{x^2 - 2y^2}{xy}, \quad x, y \in (0, \infty)$$

függvényt.

(a) Számítsuk ki a függvény x és y változók szerinti parciális deriváltjait!

(b) Adjuk meg a $\texttt{grad}\, f(1,2)$ értékét!

(c) Írjuk fel az $(1, 2, f(1,2))$ pontban tekintett érintősík egyenletét!

(d) Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat az $(x_0, y_0) = (1,2)$ pontban!

(e) Írjuk fel a függvény Hesse-mátrixát!

46. Feladat (Iránymenti derivált kiszámítása, I.):

Számítsuk ki az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\mathrm{e}^{xy} - xy$$

függvény $\mathbf{v} = (3,4)$ irány mentén vett iránymenti deriváltját az $(1,0)$ pontban!

<u>*Útmutatás*</u>:

$$\partial_{\mathbf{v}} f(x,y) = f'_{\mathbf{v}}(x,y) = \texttt{grad}\, f \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

47. Feladat (Iránymenti derivált kiszámítása, II.):

Számítsuk ki az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 - xy + y^2$$

függvény $\mathbf{e}$ irányában vett iránymenti deriváltját a $P(1,1)$ pontban, ha $\mathbf{e}$ az x-tengely pozitív ágával α szöget bezáró vektor! Melyik irány esetén lesz a derivált értéke a legnagyobb? Mennyi ez a maximum?

9. Gyakorlat: Többváltozós függvények (Érintősík, gradiens vektor, Jacobi-mátrix, láncszabályok)

48. Feladat (Érintősík, II.):

Mutassuk meg, hogy a $P_0(1,1,3)$ pont rajta van a

$$z = (y + x^2)(y - x^3) + 3, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

egyenletű felületen! Írjuk fel ebben a pontban a felület érintősíkjának az egyenletét! Adjuk meg az érintősík egy normálvektorát!

49. Feladat (Parciális deriváltak, gradiens vektor, érintősík, III.):

Számítsuk ki a

$$z = \cos(x - 2y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény elsőrendű parciális deriváltjait! Adjuk meg a gradiens vektor értékét az $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pontban, és írjuk fel az érintősík egyenletét ugyancsak ebben a pontban! Adjuk meg az érintősík egy normálvektorát!

50. Feladat ($f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény Jacobi-mátrixa):

Számítsuk ki az

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy - y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

kétváltozós valós függvény $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ Jacobi-mátrixát az $\mathbf{a} = (1, 2)$ pontban!

51. Feladat (Vektor-vektor függvény Jacobi-mátrixa):

Számítsuk ki az

$$\mathbf{f}(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

kétváltozós vektor-vektor függvény $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ Jacobi-mátrixát az $\mathbf{a} = (1, 2)$ pontban!

Útmutatás:
Jacobi-mátrix (Derivált mátrix):
Tegyük fel, Legyen $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, azaz $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_{\mathbf{f}}$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})),$$

ahol $f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az i-edik koordinátafüggvény. Ha $\mathbf{f} \in D\{\mathbf{a}\}$ (azaz $\mathbf{f}$ deriválható az $\mathbf{a}$-ban), akkor $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ és $\forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ létezik f_j-nek x_i szerinti parciális deriváltja $\mathbf{a}$-ban, és ezeket mátrixba rendezve kapjuk az $\mathbf{f}$ *függvény* $\mathbf{a}$*-ban vett derivált mátrixát*, vagy *Jacobi-mátrixát*, azaz

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Megjegyzések:

- A $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ helyett szoktuk a $\partial_i f_j$ jelölést is használni, ezt is ismerni kell.
- Kétszer deriválható $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények esetén (azaz $f \in D^2$ esetén) az $\mathbf{f}''$ nem más, mint a Hesse-mátrix.
- A deriválható vektor-vektor függvények definíciójában $\mathbf{A} = \mathbf{f}'(\mathbf{a})$, vagyis az $\mathbf{A}$ mátrix nem más, mint az $\mathbf{f}$ függvény $\mathbf{a}$-ban tekintett Jacobi-mátrixa (derivált mátrixa).

52. Feladat (Láncszabály első speciális esete):

A láncszabály alkalmazásával számítsuk ki a

$$z(t) := F(f(t), g(t)) = F(x, y)$$

függvény $z'(t)$ deriváltját, ahol

$$F(x, y) := (\operatorname{arctg} x) + y, \quad x := \mathrm{e}^{2t} \text{ és } y := \cos(2t).$$

Útmutatás:
A láncszabály első speciális esete:

Tegyük fel, hogy $F \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $z = F(x, y)$ szabállyal megadott valós értékű kétváltozós függvény. Tegyük fel továbbá, hogy x és y mindketten függvényei a t változónak, azaz

$$x = f(t), \quad y = g(t).$$

Ezeket behelyettesítve F-be kapjuk, hogy $z = F(f(t), g(t))$, azaz így a z csupán t függvénye, azaz $z \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mely egy külső F és egy $\in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ belső függvény kompozíciója. Tegyük fel, hogy F, f, g deriválható függvények. Ekkor

$$z'(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \partial_1 F(f(t), g(t)) \cdot f'(t) + \partial_2 F(f(t), g(t)) \cdot g'(t).$$

Megjegyzés:
A láncszabály első speciális esetének képletét egyszerűbben is le tudjuk írni, éspedig

$$z'(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \partial_1 F \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \partial_2 F \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t},$$

vagy akár a következő alakban:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

53. Feladat (Láncszabály második speciális esete I.):

A láncszabály második speciális esetével számítsuk ki a

$$z(t, s) := F(f(t, s), g(t, s)) = F(x, y)$$

függvény $\frac{\partial z}{\partial t}$ és $\frac{\partial z}{\partial s}$ parciális deriváltjait, ha

$$F(x, y) := \frac{x - y}{x + y}, \text{ valamint } x := \mathrm{e}^{t+s} \text{ és } y := \mathrm{e}^{t \cdot s}.$$

54. Feladat (Láncszabály második speciális esete II.):

A láncszabály alkalmazásával számítsuk ki a

$$z(t, s) := F(f(t, s), g(t, s)) = F(x, y)$$

függvény $\frac{\partial z}{\partial t}$ és $\frac{\partial z}{\partial s}$ parciális deriváltjait, ha

$$F(x, y) := \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ valamint } x := \frac{1}{\sqrt{t^2 - s^2}} \text{ és } y := \mathrm{e}^{t \cdot s}.$$

Útmutatás:

A láncszabály második speciális esete:

Tegyük fel, hogy $F \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $z = F(x, y)$ szabállyal megadott valós értékű kétváltozós függvény. Tegyük fel továbbá, hogy x és y *mindketten kétváltozós függvények* t és s változókkal, azaz

$$x = f(t, s), \quad y = g(t, s).$$

Ezeket behelyettesítve F-be kapjuk, hogy $z = F(f(t, s), g(t, s))$, azaz így z a t és s függvénye, azaz $z \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mely egy külső F és egy $\in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ belső függvény kompozíciója. Tegyük fel, hogy F, f, g deriválható függvények. Ekkor

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \partial_1 F(f(t, s), g(t, s)) \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + \partial_2 F(f(t, s), g(t, s)) \cdot \frac{\partial g}{\partial t},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \partial_1 F(f(t, s), g(t, s)) \cdot \frac{\partial f}{\partial s} + \partial_2 F(f(t, s), g(t, s)) \cdot \frac{\partial g}{\partial s}.$$

Megjegyzés:

A láncszabály második speciális esetének képletét egyszerűbben is le tudjuk írni, éspedig

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \partial_1 F \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + \partial_2 F \cdot \frac{\partial g}{\partial t},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \partial_1 F \cdot \frac{\partial f}{\partial s} + \partial_2 F \cdot \frac{\partial g}{\partial s}.$$

vagy akár a következő alakban:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}.$$

10. Gyakorlat: Feltétel nélküli és feltételes szélsőérték-számítás

55. Feladat (Lokális szélsőértékszámítás, I.):

Határozzuk meg az

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

56. Feladat (Lokális szélsőértékszámítás, II.):

Határozzuk meg az

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

57. Feladat (Szöveges szélsőérték feladat):

Egységnyi térfogatú téglatestek közül melyiknek a legkisebb a felszíne?

58. Feladat (Feltételes szélsőérték feladat, I.):

Tekintsük az alábbi feltételes szélsőérték feladatot:

$$max f(x,y) = x + y, \text{ feltéve, hogy } g(x,y) = x^2 + y - 1 = 0.$$

(a) Oldjuk meg úgy, hogy a korlátozó feltételből y kifejezésével visszavezetjük a problémát egyváltozós, feltétel nélküli szélsőérték feladatra!

(b) Oldjuk meg Lagrange-szorzók módszerével is! (Alkalmazzuk itt a szükséges feltételt és az elégségeset is!)

<u>*Megjegyzés*</u>: Az előző szélsőérték feladatot

$$max(x + y), \text{ feltéve, hogy } g(x,y) = x^2 + y - 1 = 0$$

alakban is írhattuk volna, mindkét jelölésmódot ismerni kell.

59. Feladat (Feltételes szélsőérték feladat, II.):

Tekintsük az alábbi feltételes szélsőérték feladatot:

$$min f(x,y) = x^2 + y^2, \text{ feltéve, hogy } g(x,y) = x + 2y - 4 = 0.$$

(a) Mi a feladat geometriai tartalma?

(b) Oldjuk meg úgy, hogy a korlátozó feltételből y kifejezésével visszavezetjük a problémát egyváltozós, feltétel nélküli szélsőérték feladatra!

(c) Oldjuk meg Lagrange-szorzók módszerével is! (Alkalmazzuk itt is a szükséges feltételt és az elégségeset is!)

60. Feladat (Feltételes szélsőérték feladat, III.):

Oldjuk meg Lagrange-szorzók módszerével az alábbi feltételes szélsőérték feladatot:

$$max f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2, \text{ feltéve, hogy } x + y = 100.$$

Bizonyítsuk be, hogy valóban megtaláltuk az optimális megoldást!

11. Gyakorlat: Numerikus sorozatok

61. Feladat (Numerikus sorozatok határértéke (1. Féléves anyag ismétlése)):

Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$(a) \quad a_n = \left(\frac{1-3n}{4n+12}\right)^7, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(b) \quad a_n = \frac{n^2+3n-1}{n^7+7n+5}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(c) \quad a_n = \frac{3n^3-3n+1}{5n^3+n^2-1}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(d)\quad a_n = \frac{1-n^3}{n^2+10}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(e)\quad a_n = \sqrt{n^2+3n-10} - 3n, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(f)\quad a_n = \sqrt[n]{3^n+2^n}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(g)\quad a_n = \left(\frac{9n+1}{9n-1}\right)^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$(h)\quad a_n = \frac{2n^6 - 20\sin^2(5n)}{8n^8 - n^3 + 1}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(i)\quad a_n = \frac{\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(j)\quad a_n = \frac{2^n - 7^n}{8^n - 3^n}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(k)\quad a_n = \left(\frac{n+10}{n}\right)^{\frac{n^2+3}{2n}}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(l)\quad a_n = \frac{n^{1000}}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(m)\quad a_n = \frac{\log_3 n + n!}{n^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A fenti feladatok mellett - ha marad idő - érdemes még egyéb sorozat határértékeket is gyakorolni, pl. az Egyváltozós valós függvények analízise Neptun-tananyagból.

12. Gyakorlat: Numerikus sorok

62. Feladat (Sorösszeg meghatározása, I.):

Számítsuk ki az alábbi numerikus sor összegét:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3}{4^n}.$$

63. Feladat (Teleszkopikus sor összege):

A részletösszeg-sorozat határértékének meghatározásával számítsuk ki az alábbi teleszkopikus numerikus sor összegét:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

64. Feladat (Konvergencia vizsgálat, I.):

Vizsgáljuk a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+10}$$

sor konvergenciáját!

65. Feladat (Konvergencia vizsgálat, II.):

Vizsgáljuk a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{20^n}$$

sor konvergenciáját!

66. Feladat (Konvergencia vizsgálat, III.):

Vizsgáljuk az alábbi sorok konvergenciáját:

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{5^n};$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right);$$

$$(c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n!}{n^n}.$$

67. Feladat (Divergencia, feltételes konvergencia, abszolút konvergencia vizsgálata):

Vizsgáljuk, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{2n+1}{2^n}$$

sor divergens, feltételesen konvergens vagy abszolút konvergens?

68. Feladat (Geometriai sor összege):

Számítsuk ki a

$$\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

sor összegét!

69. Feladat (Az igazságtalan házigazda feladata):
Tegyük fel, hogy végtelen sok embert hívunk vendégségbe magunkhoz és hogy egyforma kör alakú pizzákból szolgálunk fel nekik a következő igazságtalan szabály szerint: mi, vendéglátók, nem eszünk, kiszolgáljuk a vendégsereget. Érkezéskor minden vendég húz egy sorszámot, és az első sorszámú vendég kap egy pizzát, a következő sorszámú vendég egy felet, az utána következő sorszámú egy negyed pizzát, az azutáni már csak egy nyolcadot, és minden lépés után már csak feleannyit kap a soron következő vendég.
Pontosan mennyi pizzát kell rendelnünk ehhez a bulihoz?

70. Feladat (Határértékes összehasonlító kritérium):
A határértékes összehasonlító kritérium segítségével vizsgáljuk az alábbi sorok konvergenciáját:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+7}{n^2};$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^6+n^5-n^2}{n^7+n};$$

$$(c) \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^6+n^5-n^2}{n^5-n};$$

$$(d) \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^5}.$$

Útmutatás: Ezeket a feladatokat a következő tétellel kérjük megoldani:

Tétel (Határértékes összehasonlító kritérium): Legyenek $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitív tagú numerikus sorok. Tekintsük az alábbi határértéket:

$$h := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Ekkor

1) ha $h > 0$ véges szám, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ egyszerre konvergensek vagy egyszerre divergensek (azaz *ekvikonvergensek*);

2) ha $h = 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens;

3) ha $h = \infty$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergens.

Azt, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ egy 0-tól különböző véges szám, $a_n \sim b_n$-nel jelöljük.

13-14. Gyakorlatok: Felkészülés a vizsgára. A nehezebb típusfeladatok megbeszélése