

Sztochasztikus rendszerek matematikája

5. gyakorlat

2017. november 7. kedd: 2-4; 4-6 és november 9. csütörtök: 4-6

[A] Elméleti feladatok

[B] Gyakorlati feladat

[C] Adatok

[A] Elméleti feladatok

1. Legyen az ε_t , $t \in \mathbb{Z}$ független sorozatra $E(\varepsilon_t) = 0$, $D^2(\varepsilon_t) = 2$ és legyen az ε_t -ből képzett MA(2) folyamat $X_t = 2\varepsilon_t - 5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$. Adjuk meg az X_t folyamat kovarianciafüggvényét!
2. Legyen az ε_t , $t \in \mathbb{Z}$ független sorozatra $E(\varepsilon_t) = 3$, $D^2(\varepsilon_t) = 1$ és az $X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t$, $X_t \equiv 0$ egy ε_t -ből képzett AR(1) folyamat. Adjuk meg a folyamat várhatóértékét és varianciáját!
3. Legyen A és B független $E(A) = E(B) = 0$ és $D(A) = D(B) = 1$ paraméterű valószínűségi változó. Lássuk be, hogy a $Z_t = A \sin(\vartheta t) + B \cos(\vartheta t)$, $t \in \mathbb{Z}$ -re minden $\vartheta \in \mathbb{R}$ esetén gyengén stacionárius folyamat! Számítsuk ki a Z_t kovarianciafüggvényét!
4. Tekintsük azt az $X_t \sim \text{ARMA}(1, 1)$ folyamatot amelyik $X_t - aX_{t-1} = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}$, $t \in \mathbb{Z}$ -re. Ha $|a| < 1$ és $a \neq -b$ akkor az X_t az ε_t végtelen, kauzális mozgóátlaga. Írjuk fel ilyen formában! Ha $|b| < 1$, akkor az X_t invertálható, vagyis az ε_t előállítható X_t -ből. Állítsuk elő!
5. Az $X_t - \frac{3}{10}X_{t-1} - \frac{1}{10}X_{t-2} = \varepsilon_t - \frac{1}{5}\varepsilon_{t-1}$ ARMA(2, 1) folyamat stabil-e, invertálható-e? Ha lehet, adjuk meg a kauzális mozgó átlag előállítását!
6. Legyen $X_t = \frac{1}{m+1}X_{t-1} + \varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$, ahol m pozitív egész, az ε_t független, azonos eloszlású 0 várhatóértékű és 2 szórású folyamat. A Y_t az ε_t folyamattól (így X_t -től is) független folyamat, amely független azonos eloszlású, 0 várhatóértékkel és 3 szórással. Adjuk meg a $U_t := X_t + Y_t$ folyamat γ_U kovarianciafüggvényét! Számoljuk ki az $V_t = U_t - \frac{1}{m+1}U_{t-1}$, $t \in \mathbb{Z}$ folyamat γ_V kovarianciafüggvényét! Milyen típusú folyamat az U_t és a V_t ?

[B] Gyakorlati feladat

Adott egy gyártási folyamat során, egyenlő időközönként mért 559 porszemcseméret. Idősorelemzés az **R** program és a `library(tseries)` kiegészítése segítségével.

1. Az adatokat beolvassuk: `Y <- ts(c(...))`, és a `plot(Y)` függvénnyel ábrázoljuk. Az ábra alapján feltételezhető, hogy a mérésor nem stacionárius, de nem egy trend okán.
2. Kirajzoljuk az ACF (autocovariance function: `acf(Y)`) és a PACF (partial autocovariance function: `pacf(Y)`) függvényt. Ezek alátámasztják a "nem stacionárius" feltevést.

3. Két egységgyök tesztet végzünk:

augmented Dickey-Fuller teszt:

```
adf.test(Y) # H0 : unit root, H1 : no unit root
```

Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin teszt:

```
kpss.test(Y) # H0 : stationary, H1 : trend+random walk+stationary error
```

Mindkettő az $I(1)$, azaz az "elsőrendben integrált" feltevést igazolja.

4. Az `Y1 <- diff(Y)` differencia folyamat hasonló vizsgálata nem veti el a stacionaritást!

5. Három ARIMA modell illesztése:

```
M_ar <- arima(Y1,order=c(2,1,0)); M_ar # ARIMA(p=2,d=1,q=0)
```

```
M_ma <- arima(Y1,order=c(0,1,1)); M_ma # ARIMA(p=0,d=1,q=1)
```

```
M_arma <- arima(Y1,order=c(2,1,1)); M_arma # ARIMA(p=2,d=1,q=1)
```

Mindhárom modell esetén:

paraméter szignifikancia, hiba folyamat korreláció és normalitás vizsgálat.

```
tsdiag(M_ar) # Ljung-Box: a maradék nem korrelalatlan
```

```
qqnorm(M_ar$residuals) # QQplot: a maradék nem normális
```

```
jarque.bera.test(M_ar$residuals) # Jarque-Bera: nem normális
```

```
tsdiag(M_ma) # Ljung-Box: a maradék nem korrelalatlan
```

```
qqnorm(M_ma$residuals) # QQplot: a maradék nem normális
```

```
jarque.bera.test(M_ma$residuals) # Jarque-Bera: nem normális
```

```
tsdiag(M_arma) # Ljung-Box: a maradék KORRELÁLATLAN
```

```
qqnorm(M_arma$residuals) # QQplot: a maradék nem normális
```

```
jarque.bera.test(M_arma$residuals) # Jarque-Bera: nem normális
```

A hibafolyamat korreláció csak a 3. modell esetén tekinthető 0-nak.

A hibafolyamat normalitása egyik modell esetén sem érvényes.

6. A három modell összehasonlítása Akaike, egylépéses előrejelzési hiba.

[C] Adatok

Y <-

ts(c(

1153654,1146315,1146315,1160994,1163440,1160994,1163440,1168333,1163440,1168333,1173226,1170780,
1173226,1173226,1178120,1175673,1183013,1178120,1183013,1178120,1183013,1183013,1185459,1183013,
1170780,1160994,1183013,1187906,1180566,1183013,1185459,1183013,1185459,1180566,1183013,1185459,
1183013,1183013,1183013,1183013,1180566,1183013,1178120,1183013,1173226,1173226,1175673,1178120,
1175673,1178120,1178120,1173226,1163440,1165887,1168333,1165887,1168333,1168333,1173226,1163440,
1160994,1156101,1156101,1156101,1153654,1151208,1156101,1158547,1153654,1153654,1153654,1151208,
1148761,1148761,1151208,1148761,1148761,1146315,1146315,1141422,1143868,1141422,1146315,1148761,
1143868,1148761,1146315,1141422,1141422,1138975,1141422,1138975,1136529,1136529,1134082,1134082,
1129189,1134082,1129189,1134082,1138975,1134082,1136529,1138975,1136529,1136529,1138975,1136529,
1131636,1141422,1143868,1136529,1138975,1138975,1134082,1136529,1138975,1136529,1136529,1141422,
1143868,1146315,1156101,1151208,1146315,1143868,1136529,1134082,1134082,1131636,1131636,1131636,
1131636,1131636,1124296,1134082,1134082,1131636,1131636,1131636,1131636,1112063,1126742,1129189,
1126742,1129189,1131636,1129189,1126742,1129189,1126742,1129189,1131636,1126742,1126742,1129189,
1131636,1126742,1129189,1112063,1134082,1129189,1126742,1131636,1136529,1134082,1141422,1148761,
1148761,1160994,1163440,1165887,1160994,1163440,1168333,1170780,1170780,1165887,1168333,1165887,
1163440,1168333,1168333,1170780,1165887,1165887,1173226,1168333,1187906,1168333,1170780,1165887,
1168333,1163440,1165887,1163440,1163440,1163440,1160994,1160994,1163440,1158547,1158547,1158547,
1156101,1156101,1156101,1153654,1151208,1156101,1158547,1151208,1151208,1148761,1148761,1143868,
1141422,1141422,1143868,1141422,1143868,1143868,1143868,1143868,1143868,1143868,1141422,1138975,1141422,
1136529,1131636,1129189,1126742,1124296,1124296,1124296,1121849,1121849,1124296,1121849,1124296,
1116956,1124296,1124296,1116956,1119403,1121849,1121849,1121849,1119403,1116956,1119403,1119403,
1124296,1121849,1121849,1119403,1121849,1121849,1112063,1116956,1116956,1116956,1119403,1119403,
1121849,1116956,1121849,1119403,1116956,1121849,1109617,1116956,1112063,1112063,1114510,1102277,
1099831,1102277,1107170,1102277,1112063,1114510,1116956,1121849,1121849,1121849,1124296,1126742,
1121849,1124296,1121849,1129189,1121849,1124296,1112063,1124296,1124296,1124296,1124296,1131636,
1121849,1129189,1129189,1126742,1124296,1124296,1124296,1129189,1131636,1126742,1131636,1129189,
1124296,1126742,1129189,1121849,1129189,1131636,1129189,1129189,1129189,1126742,1124296,1124296,
1131636,1129189,1126742,1131636,1129189,1131636,1129189,1126742,1129189,1126742,1129189,1129189,
1129189,1131636,1129189,1129189,1121849,1124296,1124296,1121849,1129189,1126742,1124296,1124296,
1121849,1124296,1126742,1124296,1124296,1121849,1126742,1124296,1124296,1126742,1124296,1124296,
1124296,1126742,1129189,1134082,1134082,1134082,1129189,1126742,1126742,1129189,1136529,1138975,
1143868,1148761,1148761,1151208,1156101,1153654,1156101,1158547,1160994,1168333,1163440,1165887,
1165887,1163440,1168333,1168333,1168333,1173226,1168333,1173226,1175673,1173226,1170780,1173226,
1178120,1178120,1178120,1185459,1180566,1180566,1175673,1173226,1178120,1183013,1180566,1185459,
1180566,1183013,1180566,1183013,1183013,1183013,1180566,1178120,1173226,1183013,1183013,1178120,
1170780,1180566,1178120,1175673,1173226,1173226,1178120,1173226,1178120,1170780,1173226,1168333,
1170780,1168333,1168333,1170780,1151208,1165887,1165887,1163440,1158547,1163440,1163440,1158547,
1165887,1163440,1156101,1158547,1156101,1158547,1151208,1156101,1156101,1158547,1156101,1153654,
1148761,1148761,1146315,1148761,1151208,1146315,1148761,1151208,1146315,1143868,1143868,1148761,
1146315,1146315,1146315,1146315,1146315,1141422,1136529,1136529,1138975,1136529,1134082,1134082,
1138975,1138975,1138975,1136529,1136529,1138975,1134082,1134082,1136529,1138975,1138975,1141422,
1136529,1134082,1134082,1136529,1134082,1141422,1138975,1141422,1136529,1136529,1136529,1138975,
1131636,1131636,1138975,1136529,1131636,1136529,1134082,1129189,1131636,1131636,1134082,1134082,
1136529,1131636,1134082,1131636,1131636,1129189,1129189,1129189,1136529,1136529,1131636,1129189,
1126742,1131636,1129189,1126742,1129189,1129189,1129189,1112063,1129189,1131636,1124296,1126742,
1131636,1124296,1126742,1129189,1126742,1112063,1124296,1126742,1124296,1131636,1129189,1126742,
1129189,1124296,1126742,1121849,1129189,1124296,1121849)))/10000