6. Röpzárthelyi Időpont: 2018. május 10. (csütörtök) és 11. (péntek), a 13. heti gyakorlatokon.

Elmélet:

1. Mikor nevezünk egy diszkrét valószínűségi változót binomiális eloszlásúnak? Mennyi a várható értéke és a szórása?
2. Mikor nevezünk egy diszkrét valószínűségi változót Poisson eloszlásúnak? Mennyi a várható értéke és a szórása?
3. Mikor nevezünk egy abszolút folytonos valószínűségi változót egyenletes eloszlásúnak? Mennyi a várható értéke és a szórása?
4. Mikor nevezünk egy abszolút folytonos valószínűségi változót exponenciális eloszlásúnak? Mennyi a várható értéke és a szórása?
5. Mikor nevezünk egy abszolút folytonos valószínűségi változót m várható értékű és σ szórású normális eloszlású valószínűségi változónak?
6. Fogalmazza meg a Markov-egyenlőtlenséget (feltételekkel együtt)!
7. Fogalmazza meg a Csebisev-egyenlőtlenséget (feltételekkel együtt)!
8. Fogalmazza meg a Nagy Számok Törvényét!
9. Fogalmazza meg a Centrális Határeloszlás Tételt!

Példák:

1. Oldjuk meg az alábbi feladatokat a klasszikus valószínűség témakörből!
   - a.) Egy 52 lapos kártyacsomagból 13 lapot találomra kihúzunk. (Az egyszer kihúzott lapot nem tesszük vissza a csomagba.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy
     - a1.) a treff király a kihúzott lapok között lesz;
     - a2.) pontosan két treff lesz a kihúzott lapok között;
     - a3.) a treff király és a treff ász is a kihúzott lapok között lesz;
     - a4.) legalább egy treff lesz a kihúzott lapok között?
   - b.) Kitöltünk egy ötös lottószelevényt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
     - b1.) pontosan 3 találatunk lesz;
     - b2.) legalább 3 találatunk lesz;
     - b3.) legfeljebb 3 találatunk lesz?
   - c.) Jegyzet: 1.2.3/a, 1.2.4 kidolgozott feladat (14-16. old.), 1.3.1 gyakorló feladat (19. old.)
2. Oldjuk meg az alábbi feladatokat a geometriai valószínűség témakörből!
   - a.) Háromszög szerkeszthetőségének valószínűsége. A $(0, 1)$ intervallumon találomra kiválasztunk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így keletkezett 3 szakaszból háromszög szerkeszthető?
   - b.) Ketten megbeszélik, hogy de. 10 és 11 óra között egy meghatározott helyen találkoznak. Megállapodás szerint, aki korábban érkezik 20 percet vár a másikra. Mennyi a találkozás valószínűsége, ha mindketten véletlenszerűen érkeznek?
   - c.) Az $x^2 + b\,x + c = 0$ másodfokú egyenlet b és c együtthatóit válasszuk véletlenszerűen a $(-2, 2)$ intervallumból. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az egyenlet gyökei valós számok lesznek?
   - d.) Jegyzet: 1.2.5, 1.2.6 kidolgozott feladat (16-17. old.), 1.3.5 gyakorló feladat (20. old.)
3. Oldjuk meg az alábbi feladatokat a feltételes valószínűség, függetlenség témakörből!
   - a.) Egy urnában 6 fehér és 4 fekete golyó van. Egymás után kihúzunk 2 golyót (visszatevés nélkül). Mennyi annak a valószínűsége, hogy másodikra feketét húzunk, feltéve, hogy az első fehér volt?
   - b.) Három kockával dobunk egyszerre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kocka hatost mutat, feltéve hogy az egyes kockák különböző jelzésű számokat mutatnak?

c.) Egy munkás 2 gépen dolgozik. Az első gépet 0.87, a másodikat 0.90 valószínűséggel nem kell javítani egy műszak alatt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

  c1.) legfeljebb 1 géppel kell foglalkoznia;

  c2.) pontosan 1 géppel kell foglalkoznia

  javítás céljából egy műszak alatt, ha a gépek meghibásodása egymástól független?

d.) Három urnában fekete és fehér golyók vannak: az elsőben 3 fekete és 2 fehér, a másodikban 4 fekete és 3 fehér, a harmadikban 5 fekete és 4 fehér. Véletlenszerűen kiválasztunk egy urnát, mégpedig az elsőt 1/2, a másodikat 1/3, a harmadikat 1/6 valószínűséggel. A kiválasztott urnából kihúzunk egy golyót úgy, hogy minden golyó kihúzása azonos valószínűségű. Mennyi annak a valószínűsége, hogy fehéret húzunk?

e.) Egy rekeszben 15 labda van, amelyek közül 9 új. Az első játékhoz találomra kiveszünk 3 labdát, és ezeket játék után visszatesszük. A második játékhoz ismét 3 labdát veszünk ki találomra. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utóbb kivett labdák mind újak lesznek?

f.) Három urnában fekete és fehér golyók vannak: az elsőben 3 fekete és 2 fehér, a másodikban 4 fekete és 3 fehér, a harmadikban 5 fekete és 4 fehér. Véletlenszerűen kiválasztunk egy urnát, mégpedig az elsőt 1/2, a másodikat 1/3, a harmadikat 1/6 valószínűséggel. A kiválasztott urnából kihúzunk egy golyót úgy, hogy minden golyó kihúzása azonos valószínűségű. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első urnából húztunk, feltéve, hogy a húzás eredménye fehér?

g.) N pénzérme között kettőnek mindkét oldalán fej van, a többi érme hibátlan. Találomra kiválasztunk egy érmét és háromszor feldobjuk. Eredményül mindig fejet kapunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy hibás érmét választottunk?

h.) Hat doboz mindegyikében 6 golyó van, amelyek között rendre 1, 2, 3, 4, 5, 6 golyó fehér. Egy találomra kiválasztott dobozból 3 golyót húzunk visszatevéssel. Azt találjuk, hogy mindhárom húzásra fehér golyót vettünk ki. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 6 golyó közül éppen 2 fehér volt a dobozban?

g.) Jegyzet: 1.2.3/b,c, 1.2.7, 1.2.8 kidolgozott feladat (14. és 17-19. old.), 1.3.3, 1.3.4, 1.3.6 gyakorló feladat (19-20. old.)

4. Legyen ξ olyan valószínűségi változó, amelynek értékei $0,\ 1,\ 2, \ldots$ nemnegatív egész számok. Tudjuk, hogy a $\xi = k$ esemény valószínűsége arányos $\frac{1}{k!}$ -sal. Határozzuk meg a $P(\xi = k)$ valószínűségeket!

5. Lehet-e az

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 1 \\ \frac{1+2x}{x-0,8}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény eloszlásfüggvény?

6. Legyen

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1 \\ A + \frac{B}{x+1}, & \text{ha } x \ge 1. \end{cases}$$

  a.) Az A és B milyen értékeire lehet F eloszlásfüggvény?

  b.) Ábrázoljuk F-et!

  c.) Határozzuk meg az eloszlás sűrűségfüggvényét!

  d.) Számítsuk ki a $P(\xi > 9)$ valószínűséget!

7. Az A és B paraméterek mely értékeire lehet $F(x) = A + B \arctan x, \quad (-\infty < x < \infty)$ eloszlásfüggvény?

8. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} A\ \left(x + \frac{1}{2}\right), & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{különben }. \end{cases}$$

  a.) Az A paraméter milyen értékére lehet f sűrűségfüggvény?

  b.) Határozzuk meg az eloszlás F eloszlásfüggvényét!

  c.) Számítsuk ki a $P(0 < \xi < 0,3)$ valószínűséget!

9. Legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{ha } x \geq a, \\ 0, & \text{ha } x < a. \end{cases}$$

   a.) Határozzuk meg az a értékét!

   b.) Számítsuk ki a $P(\xi \geq \ln 2)$ valószínűséget!

   c.) Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó várható értékét és szórását!

10. Egységnyi hosszúságú szakaszon egymástól függetlenül választunk két pontot találomra. Legyen a valószínűségi változó a két pont távolsága. Határozzuk meg a két pont távolságának várható értékét!

11. Egy céllövés során minden találat egy 18 cm sugarú körlapra jut. A lövés a körlap bármely pontjára azonos eséllyel találhat. Számítsuk ki a találat helyének a kör középpontjától való távolságának szórását!

12. Mutassuk meg, hogy a

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1 \\ \frac{2}{x^3}, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű valószínűségi változónak nem létezik szórása.

13. Legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Számítsuk ki ξ várható értékét és szórását!

14. Jegyzet: 2.2.2 - 2.2.5 kidolgozott feladatok (29-36. old.), 2.3.1 - 2.3.5 gyakorló feladatok (37. old.)