5. Röpzárthelyi Időpont: 2018. április 26. (csütörtök) és 27. (péntek), a 11. heti gyakorlatokon.

Elmélet:

1. Definiálja az eseményalgebra fogalmát!
2. Írja le a $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ függvény azon 3 tulajdonságát, ami mellett valószínűséget határoz meg!
3. Mit nevezünk teljes eseményrendszernek?
4. Mikor nevezünk két eseményt függetlennek?
5. Fogalmazza meg a Teljes valószínűség tételét!
6. Fogalmazza meg a Bayes-tételt!
7. Mit nevezünk valószínűségi változónak, és hogyan definiáljuk az eloszlásfüggvényét?
8. Mi az a 4 tulajdonság, ami karakterizálja az eloszlásfüggvényt?
9. Mit nevezünk diszkrét valószínűségi változónak?
10. Mit nevezünk abszolút folytonos valószínűségi változónak?
11. Mit az a 3 tulajdonság, ami karakterizálja a sűrűségfüggvényt?
12. Hogyan definiáljuk egy diszkrét valószínűségi változó várható értékét és szórását? Milyen képlettel számoljuk ki őket?
13. Hogyan definiáljuk egy abszolút folytonos valószínűségi változó várható értékét és szórását? Milyen képlettel számoljuk ki őket?
14. Sorolja fel a várható érték és a szórás tulajdonságait!
15. Mit értünk a ξ, η diszkrét valószínűségi változók együttes valószínűség-eloszlásán?
16. Mit értünk a ξ, η abszolút folytonos valószínűségi változók együttes valószínűség-eloszlásán?
17. Mikor nevezzük a ξ, η valószínűségi változókat függetlennek? Mi a kapcsolat a független valószínűségi változók illetve a várható érték és a szórás között?
18. Mit értünk a ξ, η valószínűségi változók kovarianciáján, és mikor nevezzük őket korrelálatlannak?

Példák:

1. Számítsuk ki az e^{At} mátrixot az alábbi mátrixokra!

   a.)
   $$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   b.)
   $$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

   c.)
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Számítsuk ki az alábbi függvények Laplace-transzformáltjait!

   a) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ (egységugrás vagy heavy-side függvény)

   b) e^{kt}

c) $\sin(\omega t)$

d) $\cos(\omega t)$

e) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a \end{cases}$, $a > 0$ tetszőleges. (egységugrás vagy heavy-side függvény eltoltja)

3. Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az alábbi, lineáris elsőrendű differenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték feladatokat!

a.)
$$y'(t) - y(t) = 2, \qquad y(0) = 1.$$

b.)
$$y'(t) - y(t) = \sin t, \qquad y(0) = 0.$$

c.)
$$y'(t) - 2y(t) = \cos t, \qquad y(0) = 0.$$

4. A Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az alábbi, lineáris elsőrendű differenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték feladatokat!

a.)
$$y' - y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 2, \text{ vagy } x \geq 3, \\ 1, & 2 \leq x < 3 \end{cases} \qquad y(0) = -1.$$

b.)
$$y'(t) - y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < 3 \\ 0, & 3 \leq t \end{cases}, \qquad y(0) = 1.$$

c.)
$$y'(t) + 2y(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}, \qquad y(0) = -1.$$

d.)
$$y'(t) + y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 4 \\ 0, & t \geq 4 \end{cases}, \qquad y(0) = -1.$$

5. A Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az alábbi, lineáris másodrendű differenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték feladatokat!

a.)
$$x''(t) + 4x(t) = \cos t, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

b.)
$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^t, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

c.)
$$x''(t) + 4x(t) = f(t), \qquad x(0) = x'(0) = 0,$$

ahol
$$\begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad \text{és} \quad f(t + 2k) = f(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

6. A Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az alábbi, lineáris differenciálegyenlet rendszerekre vonatkozó kezdetiérték feladatokat!

   a.)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + y(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & t \ge 1, \end{cases} & \qquad x(0) = 0 \\ \dot{y}(t) - x(t) &= 0, & \qquad y(0) = 1. \end{aligned}$$

   b.)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + y(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & t \ge 1, \end{cases} & \qquad x(0) = 0 \\ \dot{y}(t) + x(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2, \\ 0, & t \ge 2, \end{cases} & \qquad y(0) = 0. \end{aligned}$$

7. Számítsuk ki az alábbi f és g függvények konvolucióját, és a megadott Laplace transzformálta(ka)t!

   a.) $f(t) = \sqrt{t}$, $g(t) = f(t)$, $L(f \star g)$ és $L(\sqrt{t})$.

   b.) $f(t) = e^t$, $g(t) = f(t)$, $L(f \star g)$.

8. Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x'(t) &= \int_0^t x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau, \\ x(0) &= 1 \end{aligned}$$

   integro-differenciálegyenletet!

<u>Táblázat részlet:</u> $\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = F(s-a)$, $\quad \mathcal{L}(\eta(t-a)f(t-a)) = e^{-as}F(s)$, $\quad \mathcal{L}(\eta(t))(s) = \frac{1}{s}$,
$\mathcal{L}(\sin t)(s) = \frac{1}{1+s^2}$, $\quad \mathcal{L}(\cos t)(s) = \frac{s}{1+s^2}$.