4. Röpzárthelyi

Időpont: 2018. április 12. (csütörtök) és 13. (péntek), a 9. heti gyakorlatokon.

Elmélet:

1. Fogalmazza meg a homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerek megoldására vonatkozó tételt!
2. Fogalmazza meg az állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerek alapmátrixára vonatkozó tételt!
3. Fogalmazza meg a Cayley-Hamilton tételt!
4. Fogalmazza meg az $f(A)$ mátrix-függvény létezésére vonatkozó tételt!
5. Definiálja az $\exp A$ mátrix exponens fogalmát és sorolja fel a tulajdonságait!
6. Fogalmazza meg az állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer és a mátrix-exponens kapcsolatára vonatkozó tételt!
7. Fogalmazza meg az állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer és a mátrix-exponens kapcsolatára vonatkozó tételt!
8. Hogyan értelmezzük egy f függvény Laplace transzormáltját?
9. Milyen feltételt ismer a Laplace transzformált létezésére?
10. Hogyan értelmezzük a f és g függvények $f \star g$ konvolucióját?
11. Mit tud a $f \star g$ konvolució Laplace transzformáltjáról?
12. Fogalmazza meg a folytonos és deriválható f függvény folytonos deriváltjának Laplace-transzformáltjára vonatkozó tétel!
13. Fogalmazza meg az n-szer ($n \in \mathbb{N}$) folytonosan differenciálható f függvény n-dik deriváltjának Laplace-transzformáltjára vonatkozó tétel!
14. Fogalmazza meg a folytonos f függvény és $g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$ integrálfüggvényének Laplace-transzformáltjaira vonatkozó összefüggést!
15. Fogalmazza meg a Hasonlóság Tételt!
16. Fogalmazza meg az Eltolási Tételt!
17. Fogalmazza meg egy alkalmas f függvény és $g(t) = f(t-a)$, $t \geq a > 0$ eltoltjának Laplace-transzformáltjaira vonatkozó összefüggést!

Példák:

1. Legyen $f \in L^2(-1,1)$ az alábbi:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ -1, & x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

   Keresendő az a $p_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ polinom, amelyre

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - p_4(x))^2 dx \to min$$

   Írjuk fel a megoldandó egyenletrendszert!

2. Tekintsük az $f_i \in L^2(-1,1)$ elemeket, ahol $f_1 \equiv 1,\ f_2 \equiv x,\ f_3 \equiv x^2$. Keressünk olyan $p_i,\ i = 0,1,2$ pontosan i-edfokú polinomokat, amelyek ortogonálisak $L^2(-1,1)$ -ben! Normáljuk a kapott polinomokat úgy, hogy $p_i(1) = 1,\ i = 0,1,2$ teljesüljön!

3. a.) Annak ismeretében, hogy az $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2$ függvények bármely pozitív hosszúságú intervallumon lineárisan függetlenek, a Gram-Schmidt féle ortogonalizálási eljárással határozzunk meg olyan másodfokú polinomot, amely $L^2(0,2)$ értelemben ortogonális a $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x - 1$ polinomokra!

   b.) Annak ismeretében, hogy az $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2$ függvények bármely pozitív hosszúságú intervallumon lineárisan függetlenek, a Gram-Schmidt féle ortogonalizálási eljárással határozzunk meg olyan másodfokú polinomot, amely $L^2(-2,0)$ értelemben ortogonális a $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = -x - 1$ polinomokra!

4. A Gram-Schmidt féle ortogonalizálási eljárással határozzunk meg olyan pontosan i-edfokú p_i polinomokat $i = 0,\ 1,\ 2$ -re, amelyek az alábbi x_j értékekre vonatkozóan ortogonális rendszert alkotnak!

   a.)

x_j	-2	-1	0	1	2

   b.)

x_j	0	1	2	3	4

5. Írjuk fel az alábbi adatokra a Lagrange féle interpolációs polinomot, és számítsuk ki a polinom értékét a megadott $\overline{x}$ helyen.

   a.)

x_i	0	1	2	3
y_i	0	1	8	27

$\overline{x} = -1,$

   b.)

x_i	-1	1	2	3
y_i	-8	0	1	8

$\overline{x} = 0,$

   c.)

x_i	-1	1	-2	2
y_i	0	8	-1	27

$\overline{x} = 0,$

   d.)

x_i	0	-1	1	2
y_i	0	1	0	3

$\overline{x} = -2.$

6. Írjuk fel az alábbi adatokra az Hermite-féle interpolációs polinomot!

x_i	0	1
y_i^0	0	1
y_i^1	0	3
y_i^2	$-$	6

x_i	0	2
y_i^0	-1	3
y_i^1	$-$	3

x_i	0	1
y_i^0	1	2
y_i^1	$-$	3