3. Röpzárthelyi

Időpont: 2018. március 23. (péntek) és 29. (csütörtök), a 7. és 8. oktatási hetek gyakorlatain.

Elmélet:

1. Mikor nevezünk egy $a, b \in V \mapsto \langle a, b\rangle \in \mathbb{R}$ leképezést skaláris szorzatnak?
2. Ddefiniálja a vektortérbeli norma fogalmát!
3. Cauchy - Schwarz - Bunyakovszkij egyenlőtlenség.
4. Mikor nevezünk egy $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ függvényt négyzetesen integrálhatónak?
5. Minkowski-egyenlőtlenség.
6. Fogalmazza meg a legkisebb négyzetek feladatát véges számú diszkrét pontra vonatkoztatva!
7. Fogalmazza meg a legkisebb négyzetek feladatát adott véges $x \in [a, b]$ intervallumra vonatkoztatva!
8. Írja fel azt az egyenletrendszert, amelyből megkaphatjuk a véges $x \in [a, b]$ intervallumon kitűzött legkisebb négyzetek feladat megoldását!
9. Mikor mondjuk azt, hogy a $\{\varphi_k \in L^2(a, b) : \ k \in \mathbb{N}\}$ ortogonális, illetve ortonormált függvényrendszert alkot?
10. Ismertesse a Gram-Scmidt féle ortogonalizációs eljárást!
11. Fogalmazza meg a Lagrange-féle interpoláció alapfeladatát!
12. Definiálja a Langrange-féle interpolációs polinomot!
13. Fogalmazza meg a Lagrange-féle interpoláció hibájára vonatkozó állítást!
14. Fogalmazza meg a Lagrange-féle interpoláció hibájára vonatkozó állítást egyenletesen korlátos függvény (és deriváltjai) esetében!
15. Fogalmazza meg az Hermite-féle interpoláció alapfeladatát!

Példák:

1. Írja fel az alábbi függvények Taylor-sorát a $z_0 = 0$ körül!

   a.) e^z, b.) $\sin z$, $\cos z$, c.) $\mathrm{sh} z$, $\mathrm{ch} z$.

2. Írja fel az alábbi függvények Laurent-sorát!

   a.) $f(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2}$ a $z_0 = 1$ körül,
   b.) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ a $z_0 = 0$ körül a következő tartományokra: • $|z| < 1$; • $1 < |z| < 2$; • $2 < |z|$.
   c.) $f(z) = \frac{z^2+z+3}{z^2-1}$ a $z_0 = 1$ körül.
   d.) $f(z) = \frac{e^z}{z^k}$ a $z_0 = 0$ körül.
   e.) $f(z) = \frac{2z}{(z+1)^2(z-4)}$ a $z_0 = -1$ körül.
   f.) $f(z) = z \sin \frac{1}{z}$ a $z_0 = 0$ körül.
   g.) $f(z) = z \cos \frac{1}{z}$ a $z_0 = 0$ körül.

3.) Számítsa ki az alábbi függvények reziduumát:

a.) $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}$ $\quad z_0 = i$ pólusra vonatkozóan.

b.) $f(z) = \frac{e^{iz}}{\sin z}$ $\quad z_0 = \pi$ pólusra vonatkozóan.

c.) $f(z) = \frac{3z^2+1}{z^4-1}$ $\quad z_0 = \pm 1,\ \pm i$ pólusra vonatkozóan.

d.) $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3(z+1)}$ $\quad z_0 = 1$ pólusra vonatkozóan.

e.) $f(z) = \frac{z+3i}{z^2+1}$ $\quad z_0 = -i$ pólusra vonatkozóan.

f.) $f(z) = \frac{\sin 5z}{(z-i)^4}$ $\quad z_0 = i$ pólusra vonatkozóan.

4.) Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduum tétel segítségével! (Minden görbe pozitív irányítású.)

a.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^z-1}{z^3}\, \mathrm{dz}, \quad \gamma : |z| = 2,$ $\qquad$ b.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin 2z}{z^3+z^2}\, \mathrm{dz}, \quad \gamma : |z| = \frac{1}{2},$

c.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z^3+z^2}\, \mathrm{dz}, \quad \gamma : |z| = \frac{1}{2},$ $\qquad$ d.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2-1}\, \mathrm{dz}, \quad \gamma : |z| = 2,$

e.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{z^2} \sin z\, \mathrm{dz}, \quad \gamma : |z| = \frac{1}{2}$, $\qquad$ f.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{z^2} \cos z\, \mathrm{dz}, \quad \gamma : |z| = \frac{1}{2}$.

5. Döntsük el, hogy az alábbi halmazok közöl melyek alkotnak lineáris vektorteret! Válaszunkat indokoljuk!

a.) $\mathbb{R}^n$,

b.) $\Pi_n = \{$legfeljebb n-edfokú valós együtthatós polinomok$\}$,

c.) $\widetilde{\Pi}_n = \{$1 főegyütthatójú, legfeljebb n-edfokú valós együtthatós polinomok$\}$,

d.) $\overline{\Pi}_n = \{p \in \Pi_n : p(1) = 0\}$,

e.) $C_{[a,b]}$,

f.) $\Sigma_{[a,b]}$ (az $[a, b]$-n Riemann szerint integrálható függvények halmaza).

6. Igaz-e, hogy

a.) Π_n a $C_{[a,b]}$ -nek ,

b.) $\widetilde{\Pi}_n$ a Π_n -nek,

c.) $C_{[a,b]}$ a $\Sigma_{[a,b]}$ -nek,

d.)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 0 \right\}$$

az $\mathbb{R}^4$ -nek,

e.)

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 1 \right\}$$

az $\mathbb{R}^4$ -nek,

f.) $S = \left\{ f \in C^2_{\mathbb{R}} :\ f''(x) + f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \right\}$ a $C_{\mathbb{R}}$ -nek

altere? Válaszunkat indokoljuk!

7. Adjunk meg egy-egy bázist az $\mathbb{R}^n$, Π_n, $\overline{\Pi}_n$ és S térben, és mondjuk meg a tér dimenzióját!

8. Számítsuk ki az alábbi adatokhoz legkisebb négyzetek értelemben legjobban illeszkedő legfeljebb másodfokú polinomot! Ábrázoljuk vázlatosan a kapott eredményt!

   a.) $(-2;-1),\ (-1;-1),\ (0;0),\ (1;1),\ (2;1)$

   b.) $(0;1),\ (1;-1),\ (2;0),\ (3;-1),\ (4;1)$

   c.) $(-2;-1),\ (-1;1),\ (0;-1),\ (1;1),\ (2;-1)$

   d.) $(-3;1),\ (-1;-1),\ (0;0),\ (1;-1),\ (3;1)$

9. Legyen $f \in L^2(-1,1)$ az alábbiakban megadott függvény! Keresendő az a $p_1(x) = a_1x + a_0$ polinom, amelyre

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - p_1(x))^2 dx \to \min!$$

   Írjuk fel a megoldandó egyenletrendszert, és számoljuk ki a polinom együtthatóit!

   a.)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right] \\ -1, & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

   b.)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup (0,1] \\ -1, & x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right]. \end{cases}$$

   c.)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \\ 1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

   d.)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right] \\ 1, & x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]. \end{cases}$$