Interpoláció

Matematika M1 gépészmérnököknek

2018. március 13.

Az interpoláció alapfeladata - Példa

Tegyük fel, hogy egy ipari termék - pl. autó - előzetes konstrukciójának folyamán tervezni kell a karosszériát.

Feltételek:

(i) bizonyos (x_k, y_k, z_k) pontokon át kell haladnia a felületnek

(ii) egyéb, speciális feltételeknek is megfelelő felületet akarunk illeszteni (pl. simaság, görbületi feltételek, stb...)

(iii) fontos a mérési pontosság, illetve ennek növelése a mérési adatok növelésével

(iv) lehetőleg polinomokat használjunk a könnyen kezelhetőség miatt.

Azaz a cél megváltozott az előzőekhez képest, de ugyanúgy approximációs feladatot akarunk megoldani!

Az interpoláció alapfeladatát a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Definíció 1.

Tegyük fel, hogy ismerjük egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény adott*

$$a \leq x_1 < \ldots < x_n \leq b$$

pontokban felvett

$$y_i = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n$$

értékeit. Keresendő olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény, mely kielégíti a*

$$g(x_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

interpolációs feltételek*et.*

Az interpoláció alapfeladata

Megjegyzések:

- Az $\{x_i\}_{i=1}^n$ pontokat **interpolációs alappontok**nak nevezzük.
- Az interpolációs feltétel teljesülése esetén azt reméljük, hogy a $g(x)$ interpoláló függvény az alappontok által meghatározott intervallumokban jól közelíti az $f(x)$ függvényt.
- Ha a $g(x)$ függvénnyel $f(x)$-et az (x_1, x_n) intervallumon kívül közelítjük, akkor **extrapoláció**ról beszélünk.
- További feltételeket is előírhatunk az interpoláló függvényre, pl. különböző rendű deriváltak egyezése az alappontokban. A szóba jöhető $g(x)$ függvények G halmazának megválasztásától és a feltételek esetleges kibővítésétől függően különböző típusú interpolációkról beszélünk.

Az interpoláció alapfeladata

Definíció 2.

Tegyük fel, hogy a G halmaz valamely ismert $\phi_i : [a, b] \to \mathbb{R}$, $i = i, \ldots, n$ függvények

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(x)$$

lineáris kombinációjaként áll elő. Ekkor a ϕ_i függvényeket **alapfüggvények***nek (vagy bázisfüggvényeknek) nevezzük.*

A feladat az ismeretlen $a_1, \ldots, a_n$ együtthatók interpolációs feltételből való meghatározása. Azaz az

$$\begin{aligned} a_1\phi_1(x_1) + a_2\phi_2(x_1) + \ldots + a_n\phi_n(x_1) &= f(x_1) \\ &\vdots \\ a_1\phi_1(x_n) + a_2\phi_2(x_n) + \ldots + a_n\phi_n(x_n) &= f(x_n) \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

Az interpoláció alapfeladata

Legyen

$$B = [\phi_j(x_i)]_{i,j=1}^n, \quad a = [a_1, \ldots, a_n]^T, \quad \text{és} \quad c = [f(x_1), \ldots, f(x_n)]^T.$$

Ekkor a megoldandó egyenletrendszer

$$Ba = c$$

alakú, melynek pontosan akkor van megoldása, ha $\det B \neq 0$. Ekkor $a = B^{-1}c$. Fontos: legfeljebb annyi alapfüggvényt használjunk, ahány alappontunk van, különben a feladatot nem fogjuk tudni megoldani!

Definíció 3.

Speciálisan, ha

$$\phi_i(x) = x^{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

akkor az ún. **Lagrange-féle interpolációs feladat***ról beszélünk.*

Lagrange-interpoláció

Az interpolációs feladat mátrixa ekkor

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

az ún. **Vandermonde-féle mátrix**, melyről tudjuk, hogy

$$\det B = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i),$$

azaz az alappontok különbözősége miatt biztosan nem-szinguláris. Tehát a Lagrange-féle interpolációs feladatnak egyértelmű a megoldása.

Lagrange-interpoláció

Megjegyzés: Nem minden $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^n$ függvényrendszer és $x_1 < \ldots < x_n$ alappontok esetén van megoldása, illetve egyértelmű a megoldása a lineáris interpolációs feladatnak.

Példa: Legyen $\phi_1(x) = 1$, $\phi_2(x) = x^2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Ekkor

$$B = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det B = 0,$$

így ha $f(x_1) = f(x_2)$, akkor végtelen sok megoldása van a feladatnak, egyébként pedig nincs megoldása a feladatnak.

De a cél persze nem az, hogy ezt mindig megoldjuk, hiszen "drága" lenne! A cél most az, hogy megadjuk ennek egy olyan megoldását, mely könnyen számolható!

Legyen

$$q_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ezeket a q_i polinomokat nevezzük a **Lagrange-féle interpoláció bázisá**nak. Ekkor ha a Lagrange-féle polinomot az

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i q_i(x)$$

alakban írjuk fel, akkor könnyen látható, hogy $L_n(x_k) = f_k$ teljesül minden alappontra.

Lagrange-interpoláció

Kérdés: Mekkora hibát vétünk az interpoláció során?

Tétel 1.

Ha $f \in C^n_{[a,b]}$, $[x_1, x_n] \subseteq [a, b]$ *és* $x^* \in [a, b]$, *akkor*

$$f(x^*) - p(x^*) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x^* - x_1)\dots(x^* - x_n),$$

ahol $\xi = \xi(x^*)$ *az* x^* *és az* x_1, x_n *pontok által kifeszített intervallumban van.*

Az alkalmazások során a tételt módosított formában szoktuk használni.

Lagrange-interpoláció

Tétel 2.

Tegyük fel, hogy a függvény n-dik deriváltja egyenletesen korlátos, azaz létezik egy olyan $M_n \in \mathbb{R}$ sorozat, melyre

$$|f^{(n)}(x)| \leq M_n \quad (x \in [a, b]).$$

Ekkor

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M_n}{n!}|(x - x_1)\dots(x - x_n)| \leq \frac{M_n}{n!}(b - a)^n.$$

A második egyenlőtlenség persze sokkal durvább becslést ad, mint az első, viszont x-től függetlenül egyenletes korlátot ad a hibára a teljes $[a, b]$ intervalum esetén.

Lagrange-interpoláció

Példa: hány ekvidisztáns alappontban kell megadnunk a $\sin x$ függvény táblázatát a $[0, \pi/2]$ intervallumban ahhoz, hogy a közbülső pontokban a Lagrange interpolációt használva a hiba legfeljebb 10^{-4} legyen?

Megoldás: Legyen $h = x_{i+1} - x_i$. Az

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M_n}{n!}|(x - x_1)\dots(x - x_n)| \leq \frac{M_n}{n!}(b - a)^n$$

hibabecslés alapján tehát olyan h-t keresünk, melyre $(M_2 h^2)/2 \leq 10^{-4}$. A $\sin x$ függvény tulajdonságai alapján az $M_2 = 1$ választás kézenfekvő, amiből adódik, hogy $h \leq \sqrt{2}/100$, $n \geq \pi/2h$ miatt

$$n \geq 112.$$

Lagrange-interpoláció

Ha viszont a hibakorlátot az

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M_2}{2} \max |(x - x_i)(x - x_{i+1})|$$

becslésből közvetlenül vezetjük le szélsőérték számítással, akkor az élesebb

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M_2 h^2}{8}$$

eredményt kapjuk. Ez alapján kiderül, ahogy

$$n = 28$$

alappont is elég.

Hermite-interpoláció

Módosított feladat: nem csak a függvényértékeket, hanem bizonyos deriváltak értékét is elő akarjuk írni a függvényekre.

Precíz megfogalmazás: tegyük fel, hogy $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ különböző alappontok, továbbá $m_0, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ olyan multiplicitások, melyekre

$$\sum_{i=0}^{n} m_i = m.$$

Keresendő tehát olyan H polinom, melyre

$$H^{(j)}(x_i) = f_{ij}, \quad i = 0, \ldots, n, \quad j = 0, \ldots, m_i - 1,$$

ahol az (x_i, f_{ij}) párok adottak. **Ez az ún. Hermite-féle interpoláció feladata.**

Tétel 3.

Az Hermite-féle interpolációs feladatnak pontosan egy megoldása van a legfeljebb $(m-1)$-edfokú polinomok terében.

- A megoldás most is egy alkalmas lineáris egyenletrendszer megoldásával történik (lásd majd gyakorlatokon).
- Lokálisan jobb approximációt kapunk, mint a Lagrange esetén, de a magasabb fokszám miatt vigyázni kell!

További fontos esetek

- A **trigonometrikus interpolációt** a

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= 1 \\
\phi_2(x) &= \sin x, \quad \phi_3(x) = \cos x, \ldots, \\
\phi_{2k}(x) &= \sin kx, \quad \phi_{2k+1}(x) = \cos kx
\end{aligned}$$

  $k = 1, \ldots, n$, $[a, b] = [-\pi, \pi]$ függvényrendszer,
- az **exponenciális interpolációt** a

$$\phi_i(x) = e^{\lambda_i x}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$$

  függvényrendszer definiálja.