

Feladatmegoldó szeminárium 2.

9. óra

2013. április 10./12.

1. Egy országban minden városból legfeljebb 3 másik városba közlekedik repülőjárat. Tudjuk, hogy bármelyik városból bármelyik városba el lehet jutni legfeljebb egy átszállással. Legfeljebb hány város lehet az országban?
2. Legyen $x_0 \in [-1, 1]$ és $x_n = f(x_{n-1})$, ahol

$$f(x) = x + \frac{1}{10} \sin(\pi x).$$

Hová konvergál x_n , amint $n \rightarrow \infty$?

3. Legyen a_n szubadditív valós sorozat, azaz minden $n, m \geq 1$ -re $a_{n+m} \leq a_n + a_m$. Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$$

létezik (esetleg $= -\infty$), és egyenlő $\inf \frac{a_n}{n}$ -nel.

4. Egy kaszinóban különböző kártyakeverő-gépeket használnak az 52 lapos francia kártya keveréséhez. Egy adott gép egy adott sorrendben cseréli meg a beadott teljes pakliban a kártyák sorrendjét. A kaszinó vezetősége takarékosági okokból minél kevesebb gépet akar üzemeltetni, de azért tetszőleges keverést meg kell tudniuk valósítani.
 - (a) Bizonyítsuk be, hogy egy darab gép nem tudja elvégezni ezt a feladatot.
 - (b) Mutassuk meg, hogy található két olyan gép, amelyekkel együtt minden lehetséges keverés előállítható.
5. Dobunk egy piros dobókockával, majd dobunk egy kék dobókockával annyiszor, amennyi a piros kockán kijött. Határozzuk meg a kék kockán kijött számok összegének a generátorfüggvényét.

Beadandó feladatok

25. Az ibibiók nyelve 37 betűt tartalmaz. Egy szóban tetszőleges két egymás mellett álló azonos betűsorozat jelentésváltozás nélkül elhagyható. Hány különböző jelentésű szó van a nyelvükben? (3 pont)
26. Adott 3 kör a síkban, melyek sugara rendre 1, 2, 3, és páronként kívülről érintik egymást. Beírnunk egy kört az általuk határolt tartományba, amely érinti mindhármat. Határozzuk meg a sugarát. (3 pont)
27. Legyenek $k \leq n$ pozitív egészek. Bizonyítsuk be, hogy az olyan k komponensű erdők száma az $1, 2, \dots, n$ csúcson, melyekben az $1, 2, \dots, k$ csúcsok különböző komponensekbe esnek, kn^{n-k-1} . (Erdő: olyan gráf, melynek minden komponense fa.) (5 pont)

Felhívás. BME Matematika Verseny lesz április 16-án, kedden 10-14 óráig a KF81 teremben.