Feladatmegoldó szeminárium 2.
8. óra
2013. április 3./április 5.

1. Béla és Jenő a következő játékot játsszák. Dobálnak egy pénzérmét, és minden dobás után feljegyzik az eredményt (F-et írnak ha fejet, I-t, ha írást dobtak). Ha a kapott sorozatban megjelenik az IIF szimbólumsorozat, akkor Béla nyer, ha az FII jelenik meg, Jenő nyer. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Béla nyer?

2. Béla az RND gombbal választ egy véletlen számot, majd a Cos gombot nyomogatja a számológépén (ahol a szöget radiánban méri). Mit tapasztal?

3. Legyen $x > 0$ és $x_{n,i}$ nemnegatív számok, hogy minden $n \geq 1$-re $\sum_{i=1}^{n} x_{n,i} = x$. Igazoljuk, hogy
$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} (1 + x_{n,i}) = x$$
pontosan akkor, ha
$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq i\leq n} x_{n,i} = 0.$$

4. A jorubák nyelvében két betű van, a "g" és az "u". Van néhány nyelvtani szabály is. Ezek szerint három egymást követő g betű, illetve két egymást követő u betű kihagyható minden szóból, illetve a "gu" "ugg"-re cserélhető minden szóban jelentésváltozás nélkül. Hány különböző jelentésű szó van a jorubák nyelvén?

5. Egy korlátos síkidom területe $9,01 cm^2$. Igazoljuk, hogy van olyan síkvektor, amellyel a síkidomot eltolva, az legalább 10 rácspontot lefed az $1 cm$ oldalhosszúságú szabályos négyzetrácsból.

Beadandó feladatok

22. Az alábbiak közül melyik prímszám?
$$101, 10101, 1010101, \ldots$$
(3 pont)

23. Mutassuk meg, hogy a
$$\begin{array}{rl} & 0.1 \\ + & 0.01 \\ + & 0.002 \\ + & 0.0003 \\ + & 0.00005 \\ + & 0.000008 \\ + & 0.0000013 \\ & \vdots \end{array}$$
végtelen összeg racionális számhoz konvergál. Mennyi ez a szám? (3 pont)

24. Létezik-e olyan $f(x)$ függvény, hogy $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$ minden $x > 0$-ra, amint n a pozitív egészek mentén tart ∞-hez, de $f(x)$ nem tart 0-hoz, amint $x \to \infty$? (5 pont)