Feladatmegoldó szeminárium 2.
1. óra
2013. 02. 13.

1. Legalább hány lépés szükséges ahhoz, hogy egy huszár egy 100×100-s sakktábla bal fölső mezőjéből az átellenes jobb alsóba jusson?

2. Legyen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ függvény. Milyen viszonyban áll a következő két tulajdonság:

   (a) f véges sok pont kivételével folytonos, illetve

   (b) f véges sok pont kivételével megegyezik egy folytonos függvénnyel?

3. Adott 13 egész szám, melyekre az igaz, hogy közülük akárhogy hagyunk el egyet, a maradék két darab hatos csoportba osztható úgy, hogy a két csoportban azonos a számok összege. Mit mondhatunk az eredeti 13 számról?

4. Legyen a_n a 10-hez relatív prím számok száma 1 és n között. Mennyi a_n aszimptotikusan? (Azaz pl. határozzuk meg, milyen α-ra létezik $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$, és mennyi ez a határérték.)

5. Bizonyítsuk be, hogy a $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ csoportnak nincs véges generátorrendszere. (Egy $A \subseteq Q$ halmaz generátorrendszer, ha $\mathbb{Q}$ minden eleme előáll véges sok, nem feltétlenül különböző A-beli elem előjeles összegeként.)

6. Határozzuk meg azt a legrövidebb görbét, amely egy szabályos háromszöget két egyenlő területű részre oszt.

Beadandó feladatok

1. Legalább hány lépés szükséges ahhoz, hogy egy huszár egy 101×101-es sakktábla bal fölső mezőjéből a jobb alsóba jusson? (3 pont)

2. Legyenek $k \leq n$ pozitív egészek. Mutassuk meg, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \frac{ke}{n}.$$

   (3 pont)

3. Bizonyítsuk be, hogy ha A a $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ csoport generátorrendszere, akkor A tetszőleges elemét elhagyva is generátorrendszert kapunk. (5 pont)