Folytonos eloszlások (3., 4. tantermi gyakorlat)

Matematika A4
Vetier András kurzusa

2009. október 15.

1. Eloszlás- és sűrűségfüggvény

Az F **eloszlásfüggvény**nek egy x pontban felvett $F(x)$ értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó mekkora valószínűséggel vesz fel az x számnál kisebb értéket:

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$$

(A félév folyamán olyan folytonos eloszlásokkal fogunk foglalkozni, amelyek minden pontot 0 valószínűséggel vesznek fel.) Tetszőleges zárt $[a, b]$ vagy nyílt (a, b) intervallum esetén az **intervallumba esés** valószínűsége kifejezhető az eloszlásfüggvény segítségével:

$$\mathbf{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$\mathbf{P}(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

A félév során csak olyan folytonos eloszlásokkal fogunk foglalkozni, melyekre az eloszlásfüggvény véges sok hely kivételével deriválható (a mérnöki gyakorlatban fontos eloszlások ilyenek). A deriváltat $f(x) = F'(x)$-szel jelöljük és **sűrűségfüggvény**nek hívjuk.

Tetszőleges zárt $[a, b]$ vagy nyílt (a, b) intervallum esetén az **intervallumba esés** valószínűsége kifejezhető a sűrűségfüggvény segítségével is:

$$\mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathbf{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(Természetesen félig nyílt, félig zárt intervallumokra is igazak a megadott képletek.)

Az **eloszlásfüggvény** jellemzői:

1. $(-\infty)$-ben 0-hoz tart,
2. ∞-ben 1-hez tart,
3. monoton növekvő (nem feltétlenül szigorúan!) vagyis ha $x_1 < x_2$, akkor $F(x_1) \leq F(x_2)$,
4. folytonos eloszlás eloszlásfüggvénye mindenhol folytonos.

A **sűrűségfüggvény** jellemzői:

1. $f(x) \geq 0$ minden x-re,
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

Az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény **kapcsolata**:

1. minden x-re $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$

   (A két integrál képlet közül a második egy kicsit pongyola, mert az x betűt két különböző szerepben is használja. Mégis, sok előny is fakad abból, hogy az x betűt helyett nem használunk t betűt.).

2. $F'(x) = f(x)$ minden olyan x-re, ahol $f(x)$ folytonos.

2. Exponenciális eloszlás

Egy valószínűségi változót **örökifjú tulajdonságú**nak nevezünk, ha teljesül rá a következő:

$$\mathbf{P}(X > a + b | X > a) = \mathbf{P}(X > b)$$

teljesül minden pozitív a és b esetén. Ha a valószínűségi változó valaminek az élettartama, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: amíg a szóbanforgó tárgy "él", a további jövőjét illetőleg esélyei ugyanolyanok, mint egy ugyanilyen típusú "újszölött" tárgynak.

Fontos tény, hogy egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.

A λ-paraméterű exponenciális sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

A λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke: $1/\lambda$, azaz a λ paraméter a várható érték reciproka. (Tehát a várható érték és a paramétere egymásnak reciprokai.)

3. Feladatok

1. Az alábbi függvények melyike lehet eloszlásfüggvény (ahol a függvény nincs megadva, ott automatikusan 0):

   a) $F(x) = 1 + e^{-x+1}$ ha $-1 < x$

   b) $G(x) = 2 - \frac{2}{x+1}$ ha $x \geq 0$

   c) $H(x) = 1 - e^{-x}$ ha $x \geq 0$

   d) $I(x) = \frac{x}{4}(4 - x)$ ha $0 < x \leq 2$ és 1 ha $x > 2$

2. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény (amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0):

   a) $f(x) = \frac{2}{x}$ ha $x > 1$

   b) $g(x) = \frac{sin(x)}{2}$ ha $0 < x < 2$

   c) $h(x) = \frac{1}{3}sin(\frac{x}{2})$ ha $0 < x < pi$ és $3^{x-1}ln(3)$ ha $x \leq 0$

   d) $i(x) = 2e^{-2x}$ ha $x > 0$

3. Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

   $$f(x) = \frac{c}{x^{2/3}} \quad \text{ha } x \in [0, 1], \text{ egyébként } 0.$$

   a) Határozzuk meg c értékét!

b) $\mathbb{P}(1/3 < X < 2/3) =?$

c) Határozzuk meg az eloszlásfüggvényt.

d) $\mathbb{P}(1/2 < X < 3/2 \mid X > 1/4) =?$

e) $\mathbb{P}(1/2 < X < 1 \mid 1/4 < X < 3/4) =?$

f) $\mathbb{P}(1/2 < X < 1 \mid X < 1/4) =?$

4. Tegyük fel, hogy egy r-sugarú céltáblán a találat helye egyenletes eloszlású. A találatnak a középponttól való távolsága legyen X. Határozza meg X eloszlás- és sűrűségfüggvényének képletét.

5. Határozza meg az alábbi X valószínűségi változók eloszlás- és sűrűségfüggvényének képletét (ahol RND - számítógép által generált - egyenletes eloszlású valószínűségi változót jelent 0 és 1 között):

   a) $X = 3RND$
   b) $X = 1 - RND$
   c) $X = (-3)RND$
   d) $X = 3RND + 7$
   e) $X = cRND + d$
   f) $X = cRND^n + d$
   g) $X = 2\pi RND$
   h) $X = sin(2\pi RND)$

6. Határozza meg az alábbi valószínűségi változók eloszlás- és sűrűségfüggvényének képletét (ahol RND_1 és RND_2 - számítógép által generált - független, egyenletes eloszlású valószínűségi változókat jelentenek 0 és 1 között):

   a) $X = RND_1 + RND_2$
   b) $X = 2RND_1 + 3RND_2$
   c) $X = 3RND_1 - 2RND_2$
   d) $X = RND_1 \cdot RND_2$
   e) $X = RND_1/RND_2$

7. Határozzuk meg RND^2 eloszlás- és sűrűségfüggvényét. Mi a valószínűsége, hogy RND^2 az $(1/2, 3/4)$ intervallumba esik? Mi a valószínűsége, hogy az $(1/2, 3/4)$ intervallumba esik, ha tudjuk, hogy nagyobb, mint $1/3$?

8. A [0,1] intervallumon egyenletes eloszlás szerint és egymástól függetlenül kijelölünk 2 pontot. Mi a nagyság szerinti

   a) nagyobbik,
   b) kisebbik

   eloszlás- és sűrűségfüggvénye, illetve várható értéke?

9. A [0,1] intervallumon egyenletes eloszlás szerint és egymástól függetlenül kijelölünk 8 pontot. Mi a nagyság szerinti

   a) legnagyobb,
   b) negyedik legkisebb,
   c) hetedik legkisebb,
   d) legkisebb

eloszlás- és sűrűségfüggvénye? Ellenőrizzük, hogy a hetedik legkisebb eloszlásfüggvényének deriváltja megegyezik a sűrűségfüggvényével.

10. Egy buszmegállóban annak a valószínűsége, hogy a következő t percen belül jön busz $1 - e^{-t/8}$. Mi annak a valószínűsége, hogy több, mint 10 percet kell várakoznunk? És annak, hogy kell várnunk legalább 5 percet, de legfeljebb 10-et? Mi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még ezután várnunk legalább 10 percet?

11. Egy alkatrész napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{2}{x^3}$, ha $x > 1$. Mi annak a valószínűsége, hogy 8 nap múlva még működik? Melyik alkatrészt érdemesebb megvenni? Azt, aminek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{x^2}$, ha $x > 1$, vagy ezt?

12. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mennyi ennek az alkatrésztípusnak az átlagos élettartama? Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

13. A teás-bögrék élettartama örökifjú tulajdonságú. (Miért?) Családunkban az átlagos élettartamuk csak 5 hónap. Mekkora a valószínűsége, hogy egy vadonat új teás-bögre 1 évet is túlél? Kedvenc bögrém már 2 és fél éves. Mekkora a valószínűsége, hogy 1 év múlva is ihatok belőle?

14. Egyenletesen választunk egy félköríven egy pontot, vagyis egy adott ívhosszba esés valószínűsége arányos az ívhosszal. Az így kapott pontot a középpontból kivetítjük a félkör átmérőjével párhuzamos érintőre, amely egy számegyenes, ahol az érintési pont a 0, és a skálázása megegyezik a félkörével. Mi annak a valószínűsége, hogy a kivetített pont a $(-\infty, 2)$ intervallumba esik? És annak a valószínűsége, hogy a $(-1, 1)$ intervallumba esik? *(Az így kapott eloszlás a Cauchy eloszlás.)*

15. Egyenletesen választunk egy pontot az egységsugarú félköríven, majd az így kapott pontot levetítjük az átmérőre. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott pont a $(-0.5, 0.5)$ intervallumba esik? Mi annak a valószínűsége, hogy kisebb, mint 0? És, hogy kisebb, mint $\frac{\sqrt{3}}{2}$? *(Az így kapott eloszlás az arcus sinus-eloszlás.)*

16. Egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot a $[-1, 1]$ intervallumban, jelöljük ezt X-szel. Mi annak a valószínűsége, hogy $X^3 < 0{,}5$? És ha a pontunkat a $[0, 1]$-ben választjuk egyenletesen? Mi lesz X^3 eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? Milyen x-re lesz $F(x) = 0{,}5$, vagyis mennyi, az X valószínűségi változó mediánja?