Logikai műveletek, kvantorok

Kijelentések

Az **állítás** vagy **kijelentés** olyan kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy **igaz (i)** vagy **hamis (h)**, ezt a mondat **logikai értékének** nevezzük.
Kijelentésekből **logikai műveletek** segítségével újabb kijelentéseket állíthatunk össze, amelyeket értéktáblázatok segítségével is megadhatunk.

Logikai műveletek

1) "nem" (negáció, tagadás): az A állítás tagadása pontosan akkor igaz, ha A hamis. Jele: $\neg A$.

2) "és" (konjunkció): az "A és B" állítás pontosan akkor igaz, ha az A és a B állítás is igaz. Jele: $A \wedge B$.

3) "vagy" (diszjunkció): az "A vagy B" állítás pontosan akkor igaz, ha az A és a B állítás közül legalább az egyik igaz. Jele: $A \vee B$.

4) "ha akkor" (implikáció): a "ha A, akkor B" állítás pontosan akkor igaz, ha az A és a B állítás is igaz, illetve ha az A állítás hamis és a B állítás tetszőleges. Jele: $A \Longrightarrow B$.

5) "akkor és csak akkor" (ekvivalencia): a "ha A, akkor és csak akkor B" állítás pontosan akkor igaz, ha az A és a B állítás közül egyszerre mindkettő igaz vagy mindkettő hamis. Jele: $A \Longleftrightarrow B$.

A	$\neg A$
i	h
h	i

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
i	i	i	i	i	i
i	h	i	h	h	h
h	i	i	h	i	h
h	h	h	h	i	i

Néhány azonosság

Értéktáblázatok segítségével igazolható:
1. $\neg(\neg A) = A$
2. kommutativitás: $A \vee B = B \vee A$, $A \wedge B = B \wedge A$
3. asszociativitás: $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$, $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$
4. disztributivitás: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Szükséges, illetve elégséges feltétel

1. Implikáció: Az $A \Longrightarrow B$ állítás esetében, azaz ha az A teljesülése esetén biztosan teljesül B is, azt mondjuk, hogy **az *A* állítás a *B* állításnak elégséges feltétele**, illetve **a *B* állítás az *A* állításnak szükséges feltétele**.

Más szóhasználattal: A-ból következik B; az A csak akkor teljesül, ha B is teljesül; ahhoz, hogy A teljesüljön, szükséges, hogy B fennálljon; ahhoz, hogy B teljesüljön, elegendő, hogy A fennálljon; stb.

2. Ekvivalencia: Az $A \Longleftrightarrow B$ állítás esetében (azaz ha $A \Longrightarrow B$ és $B \Longrightarrow A$ is teljesül) azt mondjuk, hogy **az *A* állítás a *B* állításnak szükséges és elégséges feltétele.**

Példa

Legyen A: esik az eső, B: felhős az ég.
Ekkor $A \Longrightarrow B$: Ha esik az eső, akkor felhős az ég.

- A elégséges, de nem szükséges feltétele B-nek
- B szükséges, de nem elégséges feltétele A-nak

Feladat

Adjunk meg
a) szükséges, de nem elégséges
b) elégséges, de nem szükséges
c) szükséges és elégséges
feltételt ahhoz, hogy az N egész szám osztható legyen 10-zel.

Megoldás:
a) szükséges, de nem elégséges; például:

- osztható 2-vel;
- osztható 5-tel;

b) elégséges, de nem szükséges; például:

- osztható 20-szal;
- osztható 100-zal;

c) szükséges és elégséges; például:

- osztható 2-vel és 5-tel;
- 0-ra végződik
- felírható $N = 10\,k$ alakban, ahol k egész szám.

De Morgan-azonosságok

Igazoljuk a következő azonosságokat:
1. $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
2. $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

Megoldás: Az 1. azonosság értéktáblázattal (a 2. hasonlóan igazolható):

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
i	i	i	h	h	h	h
i	h	h	i	h	i	i
h	i	h	i	i	h	i
h	h	h	i	i	i	i

Példa

a) Állítás: $x > -2$ és $x < 3$ ($\Longleftrightarrow -2 < x < 3$)
Tagadás: $x \leq -2$ vagy $x \geq 3$

b) Állítás: Tévét nézek vagy újságot olvasok.
Tagadás: Nem nézek tévét, és nem olvasok újságot.

Az implikáció és tagadása

Igazoljuk a következő azonosságokat:
1. $A \Longrightarrow B = \neg A \vee B$
2. $A \Longrightarrow B = \neg B \Longrightarrow \neg A$
3. $\neg(A \Longrightarrow B) = A \wedge \neg B$

Megoldás: Értéktáblázatokkal:

1. $(A \Longrightarrow B) = (\neg A \vee B)$

A	B	$\neg A$	$A \Longrightarrow B$	$\neg A \vee B$
i	i	h	i	i
i	h	h	h	h
h	i	i	i	i
h	h	i	i	i

2. $(A \Longrightarrow B) = (\neg B \Longrightarrow \neg A)$

A	B	$A \Longrightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Longrightarrow \neg A$
i	i	i	h	h	i
i	h	h	i	h	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	i	i	i

3. Az $A \Longrightarrow B = \neg A \vee B$ implikáció tagadása igazolható értéktáblázattal, vagy a De Morgan-azonosságok felhasználásával is:
$\neg(A \Longrightarrow B) = \neg(\neg A \vee B) = \neg(\neg A) \wedge \neg B = A \wedge \neg B$

Példa

Állítás: Ha süt a nap, akkor túrázni megyek.
Formálisan: $A \Longrightarrow B$, ahol A: süt a nap, B: túrázni megyek

Átfogalmazás ($A \Longrightarrow B = \neg A \vee B$): Nem süt a nap vagy túrázni megyek.
Tagadás ($A \wedge \neg B$): Süt a nap és nem megyek túrázni.

Kontrapozíció

A $P \Longrightarrow Q$ implikáció kontrapozíciója $\neg Q \Longrightarrow \neg P$.

Korábban láttuk, hogy a két állítás logikailag ekvivalens.

Példa

Állítás:	Ha esik az eső, akkor nedves a talaj.
Kontrapozíció:	Ha a talaj nem nedves, akkor nem esik az eső.
Állítás:	Ha csörög az óra, akkor felkelek.
Kontrapozíció:	Ha nem kelek fel, akkor nem csörög az óra.

Az ekvivalencia és tagadása

Igazoljuk a következő azonosságokat:
1. $(A \Longleftrightarrow B) = (A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$
2. $\neg(A \Longleftrightarrow B) = (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$

Megoldás:
1. Értéktáblázattal (házi feladat).
2. Felhasználva az 1. állítást, a De Morgan-azonosságot és a $\neg(A \Longrightarrow B) = A \wedge \neg B$ azonosságot:
$\neg(A \Longleftrightarrow B) = \neg((A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)) = \neg(A \Longrightarrow B) \vee \neg(B \Longrightarrow A) = (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$

Megjegyzés: Az értéktáblázat alapján is látható, hogy $A \Longleftrightarrow B$ pontosan akkor igaz, ha A és B közül mindkettő igaz vagy mindkettő hamis. Így a tagadása pontosan akkor lesz igaz, ha A és B közül az egyik igaz és a másik hamis, vagy fordítva.

Példa

Állítás:	Akkor és csak akkor megyek nyaralni, ha nyerek a lottón.
Formálisan:	$A \Longleftrightarrow B$, ahol A: nyaralni megyek, B: nyerek a lottón
Tagadás:	$(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$, azaz:

Nyaralni megyek és nem nyerek a lottón vagy nyerek a lottón és nem megyek nyaralni.

Kvantorok és tagadásuk

1. Használatos a **"minden"** szóra a $\forall$, a **"létezik"** vagy **"van olyan"** kifejezésre a $\exists$ jelölés is, ezeket **kvantoroknak** nevezzük.

2. Állítások tagadása:
   a) Állítás: "Minden A-ra igaz B" ($\forall A : B$)
   Tagadás: "Van olyan A, amelyre nem igaz B" ($\exists A : \neg B$).

b) Állítás: “Van olyan A, amelyre igaz B” ($\exists\ A : B$)
Tagadás: "Minden A-ra nem igaz B", vagy "egyik A-ra sem igaz B" ($\forall\ A : \neg B$).

3. Az $A \Longrightarrow B$ állítás **“ha akkor”** helyett a **“minden”** szóval is megfogalmazható.

Példák

1. Állítás: Minden nap esik az eső.
   Tagadás: Van olyan nap, amikor nem esik az eső.

2. Állítás: Van olyan nap, amikor tévét nézek.
   Tagadás: Egyik nap sem nézek tévét.

3. Állítás: Ha péntek van, akkor moziba megyek.
   Ugyanezt jelenti: Minden pénteken moziba megyek.

   Tagadás: Van olyan péntek, amikor nem megyek moziba.
   Ugyanezt jelenti: Péntek van és nem megyek moziba.

Feladat

Tagadjuk a következő állításokat.
a) Minden ablak nyitva van.
b) Minden emeleten van olyan ablak, ami nyitva van.
c) Minden épületben van olyan emelet, ahol minden ablak nyitva van.
d) Minden pozitív ε számhoz van olyan δ pozitív szám, hogy bármely x valós számra, ha $|x-a| < \delta$, akkor $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.
e) A villamosmérnöki kar bármely szak minden évfolyamán van lány hallgató.
e) Minden tengerész ismer olyan kikötőt, ahol van olyan kocsma, ahol még nem járt.

Megoldás:

a) Állítás: **Minden** ablak **nyitva van**.
Tagadás: **Van olyan** ablak, ami **csukva van**.

b) Állítás: **Minden** emeleten **van olyan** ablak, ami **nyitva van**.
Tagadás: **Van olyan** emelet, ahol **minden** ablak **csukva van**.

c) Állítás: **Minden** épületben **van olyan** emelet, ahol **minden** ablak **nyitva van**.
Tagadás: **Van olyan** épület, ahol **minden** emeleten **van olyan** ablak, ami **csukva van**.

d) Állítás: **Minden** pozitív ε számhoz **van olyan** δ pozitív szám, hogy **bármely** x valós számra, **ha** $|x-a| < \delta$**, akkor** $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$**.**
Tagadás: **Létezik olyan** pozitív ε szám, hogy **bármely** δ pozitív számhoz **található olyan** x szám, hogy $|x-a| < \delta$**, de** $|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$**.**

Állítások tagadása (összefoglalás)

Állítás	**Tagadás**
• A vagy B	• nem A és nem B
• A és B	• nem A vagy nem B
• ha A, akkor B	• A és nem B
• minden A-ra igaz B	• van olyan A, amelyre nem igaz B
• van olyan A, amelyre igaz B	• minden A-ra nem igaz B

Feladatok

1. feladat

Adjunk meg

a) szükséges, de nem elégséges

b) elégséges, de nem szükséges

c) szükséges és elégséges

feltételt ahhoz, hogy egy négyszög téglalap legyen.

2. feladat

Döntsük el, hogy a következő állítások igazak vagy hamisak. Írjuk le az állítások tagadását.

a) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,(x + y = 0)$

b) $(\exists y \in \mathbb{R})\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(x + y = 0)$

c) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,(x < y)$

d) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,((x^2 = y^2) \Longrightarrow (|x| = |y|))$

e) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(x < y \Longrightarrow x^2 < y^2)$

f) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\left(x < y \Longrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}\right)$

g) $(\forall a \in \mathbb{R})\,(\forall b \in \mathbb{R})\,(\exists x \in \mathbb{R})\,(a \cdot x = b)$

h) $(\exists p \in \mathbb{N})\,((p \text{ prím}) \wedge (p + 10 \text{ prím}))$

i) $(\exists x \in \mathbb{Q})\,(x^2 = 3)$

j) $[x \in \mathbb{N} \wedge y \in (\mathbb{N} \setminus \{1, x\})] \Longrightarrow \frac{x}{y} \notin \mathbb{N}$

3. feladat

Igaz vagy hamis? Írjuk le a következő állítást és a tagadását logikai formulákkal:

Ha egy valós szám minden pozitív számnál kisebb, akkor nem lehet pozitív.

Megoldások

1. feladat

a) szükséges, de nem elégséges; például:

1. van egy párhuzamos oldalpárja;
2. a szemközti oldalai párhuzamosak;

3. az átlói felezik egymást;
4. van derékszöge;
5. van két derékszöge;
6. a négyszög húrnégyszög;
7. a négyszög középpontosan szimmetrikus;
8. a négyszög tengelyesen szimmetrikus;
9. a négyszög paralelogramma.

b) elégséges, de nem szükséges; például:

1. a négyszög négyzet;
2. a négyszög átlói merőlegesek és felezik egymást.

c) szükséges és elégséges; például:

1. a négyszög minden szöge derékszög;
2. a négyszög húrnégyszög, melynek két szomszédos szöge derékszög;
3. a négyszög paralelogramma, melynek van derékszöge;
4. a négyszög szemközti oldalai egyenlők, és van derékszöge;
5. a négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, és van derékszöge;
6. van két szimmetriatengelye, melyek az oldalakra merőlegesek.

2. feladat

a) Állítás: $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,(x + y = 0)$. Igaz, mivel $y = -x$ esetén teljesül.
Tagadás: $(\exists x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(x + y \neq 0)$. Hamis.

b) Állítás: $(\exists y \in \mathbb{R})\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(x + y = 0)$. Hamis, mert ha létezne ilyen y, akkor $x = 1 - y$ választással ellentmondást kapnánk: $x + y = (1 - y) + y = 1 \neq 0$.
Tagadás: $(\forall y \in \mathbb{R})\,(\exists x \in \mathbb{R})\,(x + y = 0)$.

Megjegyzés: Az a) és b) példák alapján látható, hogy a kvantorok sorrendje számít.

c) Állítás: $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,(x < y)$, azaz nincs legnagyobb valós szám. Igaz.
Tagadás: $(\exists x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(x \geq y)$. Hamis.

d) Állítás: $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,\left((x^2 = y^2) \Longrightarrow (|x| = |y|)\right)$, azaz, ha két valós szám négyzete egyenlő, akkor az abszolút értékük is egyenlő. Igaz.
Tagadás: $(\exists x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,\left((x^2 = y^2) \wedge (|x| \neq |y|)\right)$. Hamis.

e) Állítás: $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,\left(x < y \Longrightarrow x^2 < y^2\right)$. Hamis, pl. $x = -2$, $y = 1$ esetén nem teljesül a következtetés.
Tagadás: $(\exists x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,\left((x < y) \wedge (x^2 \geq y^2)\right)$. Igaz.
Megjegyzés: A következő állítás igaz: $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,\left(0 < x < y \Longrightarrow x^2 < y^2\right)$

f) Állítás: $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,\left(x < y \Longrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}\right)$. Hamis, pl. $x = -2$, $y = 3$ esetén nem teljesül a következtetés.

Tagadás: $(\exists\, x \in \mathbb{R})\,(\exists\, y \in \mathbb{R})\,\left((x < y) \wedge \left(\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}\right)\right)$. Igaz.

Megjegyzés: A következő állítás igaz: $(\forall\, x \in \mathbb{R})\,(\forall\, y \in \mathbb{R})\,\left(0 < x < y \implies \frac{1}{x} > \frac{1}{y}\right)$

g) Állítás: $(\forall\, a \in \mathbb{R})\,(\forall\, b \in \mathbb{R})\,(\exists\, x \in \mathbb{R})\,(a \cdot x = b)$.
Hamis, például ha $a = 0$ és $b = 1$, akkor $(\forall\, x \in \mathbb{R})\,(a \cdot x = 0 \neq 1 = b)$
Tagadás: $(\exists\, a \in \mathbb{R})\,(\exists\, b \in \mathbb{R})\,(\forall\, x \in \mathbb{R})\,(a \cdot x \neq b)$. Igaz.

h) Állítás: $(\exists\, p \in \mathbb{N})\,((p \text{ prím}) \wedge (p + 10 \text{ prím}))$.
Igaz, például $3,\ 13$ vagy $7,\ 17$ ilyen prímekből álló párok.
Tagadás: $(\forall\, p \in \mathbb{N})\,((p \text{ nem prím}) \vee (p + 10 \text{ nem prím}))$. Hamis.

i) Állítás: $(\exists\, x \in \mathbb{Q})\,(x^2 = 3)$. Hamis.
Tagadás: $(\forall\, x \in \mathbb{Q})\,(x^2 \neq 3)$. Igaz.

j) Állítás: $[x \in \mathbb{N} \wedge y \in (\mathbb{N} \setminus \{1, x\})] \implies \frac{x}{y} \notin \mathbb{N}$

Átfogalmazás: $(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(\forall\, y \in \mathbb{N} \setminus \{1, x\})\,\left(\frac{x}{y} \notin \mathbb{N}\right)$. Hamis, pl. $x = 6$, $y = 2$.

Tagadás: $(\exists\, x \in \mathbb{N})\,(\exists\, y \in \mathbb{N} \setminus \{1, x\})\,\left(\frac{x}{y} \in \mathbb{N}\right)$