Matematika MC, 12. előadás

Határozott integrál

A Riemann-integrál fogalma

Definíció. Legyen $[a, b]$ egy kompakt intervallum. A $P = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ véges halmazt az $[a, b]$ intervallum egy felosztásának nevezzük, ha $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.
A felosztás osztópontjai: $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Definíció. Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ korlátos, és $P = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ egy felosztása $[a, b]$-nek. Legyen

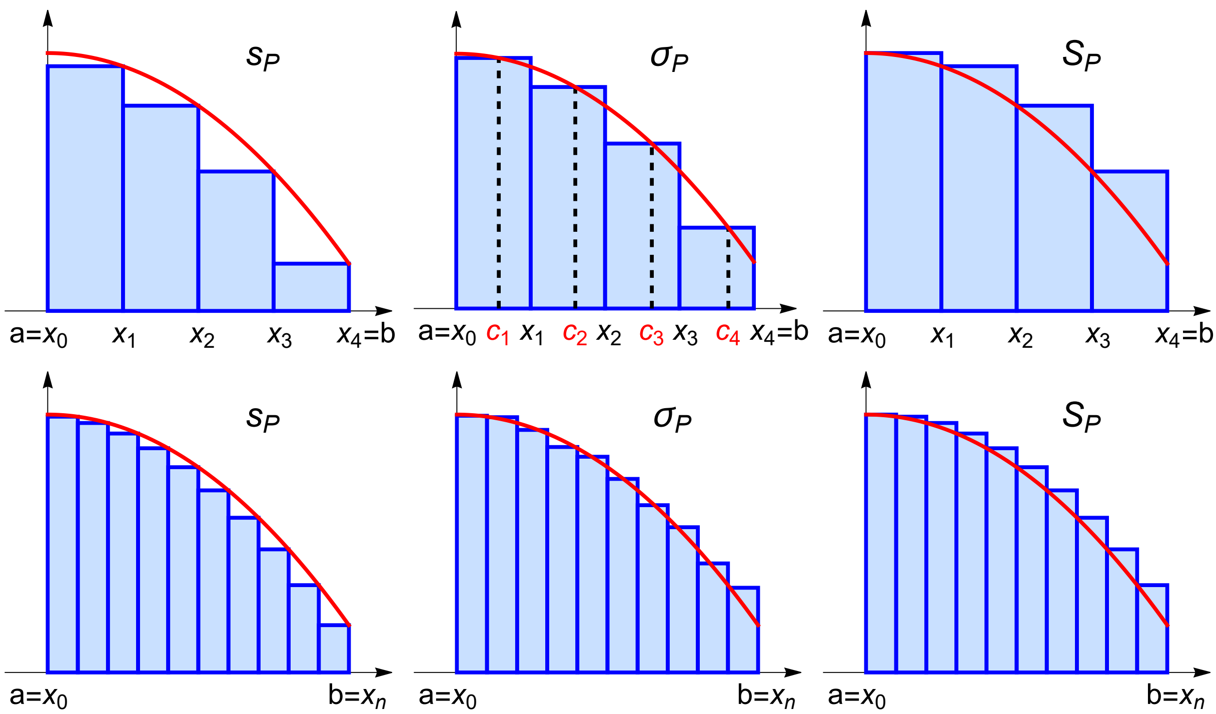
$m_k := \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

$M_k := \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

Ekkor az f függvény P felosztáshoz tartozó

- alsó integrálközelítő összege: $s_P = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$
- felső integrálközelítő összege: $S_P = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$.
- Riemann-féle integrálközelítő összege: $\sigma_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,(x_k - x_{k-1})$, ahol

$c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tetszőleges reprezentánspont.



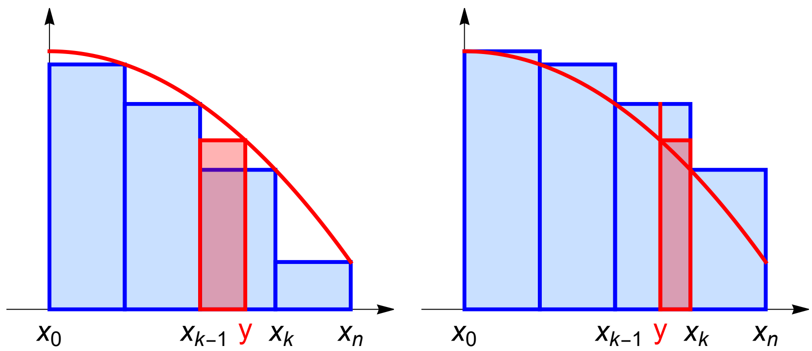
Állítás. $s_P \leq \sigma_P \leq S_P$ minden P felosztás esetén.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, mivel minden $[x_{k-1}, x_k]$ részintervallumon $m_k \leq f(c_k) \leq M_k$.

Megjegyzés: Geometriai tartalom: a függvénygörbe alatti (előjeles) terület közelítő értéke.

Definíció. Legyen P_1 és P_2 az $[a, b]$ intervallum egy-egy felosztása. Tegyük fel, hogy a P_2-t a P_1-ből úgy kapjuk, hogy a P_1 osztópontjaihoz újabb osztópontokat hozzáveszünk. Ekkor azt mondjuk, hogy a P_2 a P_1 felosztás egy finomítása.

Tétel. Ha P_2 finomítása P_1-nek, akkor $s_{P_1} \leq s_{P_2}$ és $S_{P_1} \leq S_{P_2}$,
azaz új osztópont hozzávételével az alsó közelítő összeg monoton nő,
a felső közelítő összeg monoton csökken.



Tétel. Az $[a, b]$ intervallum bármely P_1 és P_2 felosztására $s_{P_1} \leq S_{P_2}$, azaz bármely alsó közelítő összeg kisebb vagy egyenlő, mint bármely felső közelítő összeg.

Bizonyítás. Legyen $P_3 = P_1 \cup P_2 \implies P_3$ finomítása P_1-nek és P_2-nek $\implies s_{P_1} \leq s_{P_3} \leq S_{P_3} \leq S_{P_2}$

Definíció. Legyen $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor

- f alsó Darboux-integrálja: $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s_P : P \text{ felosztása } [a, b] \text{-nek}\}$
- f felső Darboux-integrálja: $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S_P : P \text{ felosztása } [a, b] \text{-nek}\}$

Következmény: Ha f korlátos $[a, b]$-n, akkor Darboux-integráljai végesek, és $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Definícó. Legyen $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény

az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható, ha $I = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Ezt a közös I számot az f függvény $[a, b]$-beli határozott integráljának nevezzük.

Jelölés: $I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$.

Az f függvény neve: integrandus.

Megjegyzés. Ha $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nem korlátos $[a, b]$-n, vagy korlátos, de $\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f$, akkor

f nem Riemann-integrálható $[a, b]$-n.

Példák

1. példa Legyen $f(x) = c \in \mathbb{R}$, $\int_a^b c \,\mathrm{dx} = ?$

$$s_P = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a),$$

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a) \text{ minden } P \text{ felosztásra.}$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup \{s_P\} = c(b-a) = \inf \{S_P\} = \overline{\int_a^b} f \implies \int_a^b c \,\mathrm{dx} = c(b-a)$$

2. példa Az $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [0,\, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x \in [0,\, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ Dirichlet-függvény korlátos, és a $[0,\, 1]$ intervallum minden P felosztására $s_P = 0$ és $S_P = 1$

$$\implies \underline{\int_a^b} f = 0 \text{ és } \overline{\int_a^b} f = 1$$

$\implies$ f nem integrálható a $[0,\, 1]$-en (és más intervallumon sem).

Szükséges és elégséges feltételek a Riemann-integrálhatóságra

Definíció. A P felosztás finomságának nevezzük és ΔP-vel jelöljük a felosztás leghosszabb részintervallumának hosszát: $\Delta P = \max_{k \in \{1, \ldots, n\}} (x_k - x_{k-1})$.

Definíció. Legyen minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén P_n az $[a,\, b]$ felosztása. Azt mondjuk, hogy a (P_n) felosztássorozat normális (vagy minden határon túl finomodó), ha $\lim_{n \to \infty} \Delta P_n = 0$.

Tétel. Legyen $f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény, és (P_n) egy normális felosztássorozata $[a,\, b]$-nek, azaz $\lim_{n \to \infty} \Delta P_n = 0$. Ekkor $\lim_{n \to \infty} s_{P_n} = \underline{\int_a^b} f$ és $\lim_{n \to \infty} S_{P_n} = \overline{\int_a^b} f$.

Tétel. Legyen $f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény.

a) Ha $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ létezik, akkor minden (P_n) normális felosztássorozatra

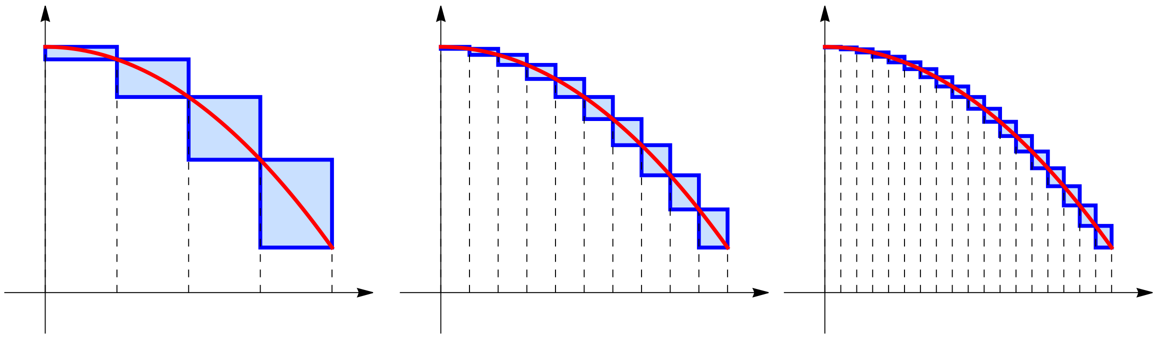
$$\lim_{n \to \infty} s_{P_n} = \lim_{n \to \infty} S_{P_n} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}.$$

b) Ha létezik olyan (P_n) normális felosztássorozat, melyre $\lim_{n \to \infty} s_{P_n} = \lim_{n \to \infty} S_{P_n} = I$, akkor

$$\exists \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = I.$$

Definíció. Legyen $f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény és $P = \{x_0,\, x_1,\, \ldots x_n\}$ felosztása $[a,\, b]$-nek. Ekkor az f függvény P felosztáshoz tartozó oszcillációs összege:

$$O_P = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,(x_k - x_{k-1}) = S_P - s_P.$$



Tétel. Az $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan P felosztás, melyre $O_P=S_P-s_P<\varepsilon$.

Emlékeztető. Az $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ korlátos függvény P felosztáshoz tartozó Riemann-féle integrálközelítő összege: $\sigma_P=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,(x_k-x_{k-1})$, ahol, $c_k\in[x_{k-1},x_k]$ tetszőleges reprezentánspont, továbbá $s_P\le\sigma_P\le S_P$ minden P felosztás esetén.

Tétel. Legyen $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor

1. $\exists\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}=I\Longrightarrow$ minden (P_n) normális felosztássorozat esetén a σ_{P_n} Riemann-féle integrálközelítő összegek sorozatára fennáll, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{P_n}=\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}=I$ (a reprezentánspontok választásától függetlenül).

2. $\exists\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}=I\Longleftarrow$ létezik olyan (P_n) normális felosztássorozat, hogy a σ_{P_n} Riemann-féle integrálközelítő összegek sorozatára fennáll, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{P_n}=I$ (a reprezentánspontok választásától függetlenül).

Megjegyzés. Fontos, hogy a határérték a reprezentánspontok választásától függetlenül létezzen. Legyen pl. $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ a Dirichlet-függvény, és (P_n) egy normális felosztássorozata $[a,b]$-nek.

Ha c_k racionális: $\sigma_{P_n}=\sum_{k=1}^{n}1\cdot(x_k-x_{k-1})=1\cdot(b-a)\longrightarrow b-a$

Ha c_k irracionális: $\sigma_{P_n}=\sum_{k=1}^{n}0\cdot(x_k-x_{k-1})=0\longrightarrow 0$

$\Longrightarrow$ a Dirichlet-függvény egyetlen intervallumon sem integrálható.

Elégséges feltételek a Riemann-integrálhatóságra

Tétel. Ha $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ monoton és korlátos, akkor f Riemann-integrálható $[a,b]$-n.

Tétel. Ha $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ folytonos, akkor f Riemann-integrálható $[a,b]$-n.

Tétel. Ha $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ korlátos és véges sok pont kivételével folytonos, akkor f Riemann-integrálható $[a, b]$-n.

Megjegyzés. Ha $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, az f függvény Riemann-integrálható, és véges sok pont kivételével $f(x) = g(x)$, akkor g is Riemann-integrálható, és $\int_a^b f = \int_a^b g$,

azaz egy Riemann-integrálható függvény értékét véges sok pontban megváltoztatva a függvény integrálható marad, és az integrál értéke is ugyanaz lesz.

Newton-Leibniz-tétel

Tétel (Newton-Leibniz-tétel).
Ha $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrálható és $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ primitív függvénye f-nek, azaz $F'(x) = f(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Bizonyítás. Legyen (P_n) normális felosztássorozata $[a, b]$-nek, azaz $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) = \\ &= (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + (F(x_3) - F(x_2)) + \ldots + (F(x_n) - F(x_{n-1})) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) \end{aligned}$$

Másrészt $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén F folytonos $[x_{k-1}, x_k]$-n és differenciálható (x_{k-1}, x_k)-n, így a Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik olyan $x_{k-1} < c_k < x_k$, melyre

$$\frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = F'(c_k) = f(c_k) \implies F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$\implies \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = \sigma_{P_n}$$
$$\implies F(b) - F(a) = \sigma_{P_n}$$

Mindkét oldal limeszét véve: $\lim_{n\to\infty} (F(b) - F(a)) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{P_n}$

A bal oldal független n-től a jobb oldal pedig f integráljához tart, így

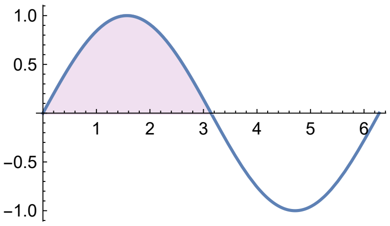
$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$

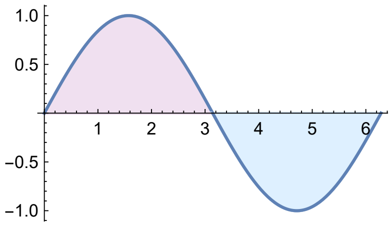
Példák

1. $\displaystyle\int_1^2 x^3\,\mathrm{dx} = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

2. $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{dx} = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{dx} = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0$





A határozott integrál jelentése: a függvénygrafikon alatti előjeles terület.

Riemann-integrálható függvények tulajdonságai

Definíció. Jelölje $R[a, b]$ az $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények halmazát.
Ha $f \in R[a, b]$ $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{dx} := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}, \quad \int_a^a f(x)\,\mathrm{dx} := 0$

Tétel. Legyen $f, g \in R[a, b]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor

(1) $\lambda f,\ f+g,\ f-g \in R[a, b]$ és $\displaystyle\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f, \quad \int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$

(2) $[\alpha, \beta] \subset [a, b] \implies f \in R[\alpha, \beta]$

(3) $a < c < b \implies \displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

(4) $f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a, b] \implies \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$

(5) $|f| \in R[a, b] \implies \displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{dx}$

(6) $\displaystyle\inf_{[a,b]} f \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f \le \sup_{[a,b]} f$

Parciális integrálás

Tétel. Ha f és g folytonosan differenciálhatók az $[a, b]$ intervallumon, akkor $\displaystyle\int_a^b f' g = [f\, g]_a^b - \int_a^b f\, g'$

Helyettesítéses integrálás

Tétel. Ha g folytonosan differenciálható, szigorúan monoton, $[a, b] \subset D_g$ és

f folytonos $[a, b]$-n, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{dt}$.

Példa. $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{dx} = ?$

Megoldás. Helyettesítés: $t = \sqrt{e^x - 1} \Longrightarrow x = x(t) = \ln(t^2 + 1)$

$$x'(t) = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \frac{1}{t^2+1} \cdot 2t \Longrightarrow \mathrm{dx} = \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{dt}$$

A határok megváltoznak: $x_1 = 0 \Longrightarrow t_1 = \sqrt{e^0 - 1} = 0$

$$x_2 = \ln 2 \Longrightarrow t_2 = \sqrt{e^{\ln 2} - 1} = \sqrt{2 - 1} = 1$$

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{dx} = \int_{t_1}^{t_2} t \cdot \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{dt} = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}\,\mathrm{dt} = \int_0^1 \frac{2(t^2+1) - 2}{t^2+1}\,\mathrm{dt} = \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{t^2+1}\right)\mathrm{dt} =$$

$$= [2t - 2\,\mathrm{arctg}\,t]_0^1 = (2 \cdot 1 - 2\,\mathrm{arctg}1) - (0 - 0) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Lebesgue tétele

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz Lebesgue-nullmértékű, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan (x_n) és (y_n) sorozat, hogy $x_n \le y_n$, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_n, y_n]$ és $\sum_{n=1}^{\infty} (y_n - x_n) < \varepsilon$.

(Azaz az A halmaz lefedhető megszámlálható sok intervallummal, amelyek összhossza kisebb, mint ε.)

Példa. 1. A valós számok bármely megszámlálható részhalmaza Lebesque-nullmértékű, például $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ vagy $\mathbb{Q}$.

2. Ha $a < b$, akkor az $I = [a, b]$ (zárt, nyílt vagy félig nyílt) intervallum hossza $b - a$, ezért nem Lebesgue-nullmértékű.

3. A Cantor-halmaz Lebesgue-nullmértékű (és nem megszámlálható) halmaz.
A Cantor-halmaz konstrukciója: a $[0, 1]$ intervallumból kitöröljük a középső harmadát, majd a megmaradt intervallumok középső harmadát is, és az eljárást a végtelenségig folytatjuk.
Ábra: https://hu.wikipedia.org/wiki/Cantor-halmaz

Tétel (Lebesgue). Az $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha korlátos és szakadási pontjainak halmaza Lebesquge-nullmértékű.

Az integrálfüggvény

Definíció. Ha f Riemann-integrálható $[a, b]$-n, akkor az integrál mint a felső határ függvényének vagy f integrálfüggvényének nevezzük az alábbi függvényt:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b]$$

Tétel (Integrálszámítás alaptétele).

1. Ha f Riemann-integráható $[a, b]$-n, akkor F integrálfüggvénye folytonos.
2. Ha f még folytonos is az $x_0 \in [a, b]$ pontban, akkor F differenciálható x_0-ban, és $F'(x_0) = f(x_0)$.

Következmény.

1. Ha f folytonos $[a, b]$-n, akkor $\forall\, x \in (a, b)$-re $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ differenciálható, és $F'(x) = f(x)$.
2. Minden folytonos függvénynek létezik primitív függvénye.

Feladat. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját:

a) $F(x) = \int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t, \quad x \neq 0$ b) $G(x) = \int_0^{x^3} \sin t^2\,\mathrm{d}t$ c) $H(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin t^2\,\mathrm{d}t$

Megoldás. a) $F'(x) = \sin x^2$, mivel $f(t) = \sin(t^2)$ folytonos.

b) $G(x) = F(x^3) \implies G'(x) = F'(x^3)\cdot 3x^2 = \sin((x^3)^2)\cdot 3x^2 = \sin(x^6)\cdot 3x^2$

c) $H(x) = \int_0^{x^3} \sin t^2\,\mathrm{d}t - \int_0^{x^2} \sin t^2\,\mathrm{d}t = F(x^3) - F(x^2) \implies H'(x) = \sin(x^6)\cdot 3x^2 - \sin(x^4)\cdot 2x$

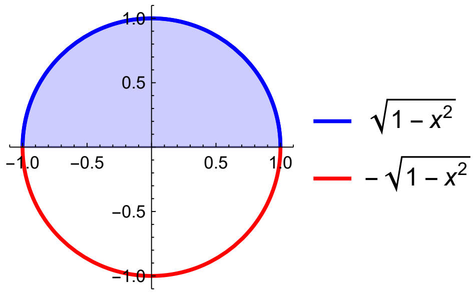
Alkalmazások

Terület

Példa. Számítsuk ki az egységkör területét.

Megoldás. Az origó középpontú $r = 1$ sugarú kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = 1 \implies y^2 = 1 - x^2 \implies y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$



Az egységkör területe: $A = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$

Helyettesítés: $x = x(t) = \sin t \Longrightarrow t = \arcsin x$

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \cos t \Longrightarrow dx = \cos t\, dt$$

A határok megváltoznak: $x_1 = -1 \Longrightarrow t_1 = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$$x_2 = 1 \Longrightarrow t_2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow A = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sqrt{1-(\sin t)^2}\cos t\, dt = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \cdot \cos t\, dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{2\cos^2 t}\, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{(1+\cos 2t)}\, dt = \left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + 0\right) = \pi$$

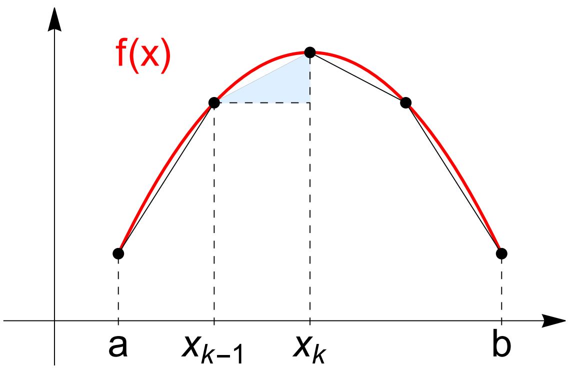
Ívhossz

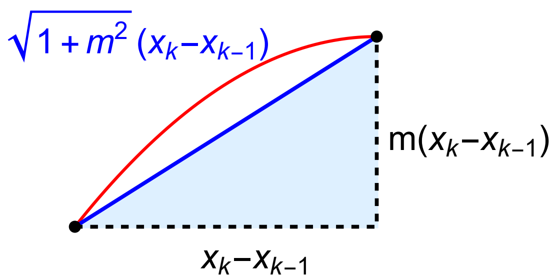
Tétel. Ha $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonosan deriválható, akkor f grafikonjának ívhossza:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Megjegyzés. Legyen $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ egy felosztás. Ha f differenciálható, akkor a Lagrange-féle középértéktétel miatt létezik olyan $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$, melyre $m = f'(c_k)$, ahol m az $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ és $(x_k, f(x_k))$ pontokat összekötő szakasz meredeksége.

Így a töröttvonal hossza $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\,(x_k - x_{k-1})$, ami pont az $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ függvény egy integrálközelítő összege.





Példa. Számítsuk ki az egységsugarú kör kerületét (ívhosszát).

Mgeoldás. Legyen $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, ha $x \in [-1, 1]$.

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Az egységkör kerülete:

$$L = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = 2\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\lim_{a\to -1+}\lim_{b\to 1-}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= 2\lim_{a\to -1+}\lim_{b\to 1-}[\arcsin x]_a^b = 2\lim_{a\to -1+}\lim_{b\to 1-}(\arcsin b - \arcsin a) =$$

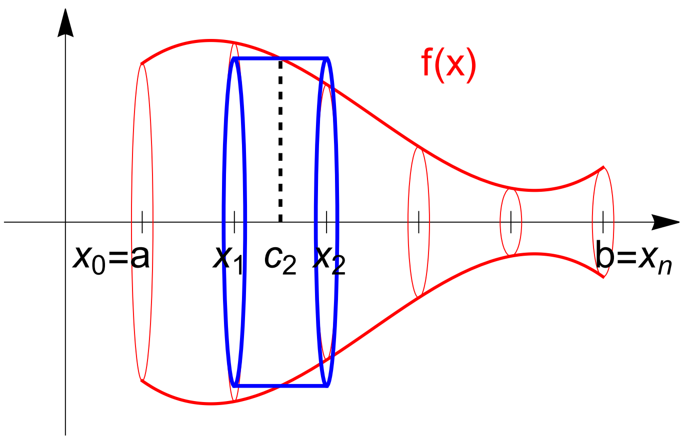
$$= 2(\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\pi$$

Forgástestek térfogata

Tétel. Az $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos, nemnegatív függvény grafikonját megforgatjuk az x tengely körül. Az így kapott forgástest térfogata

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Megjegyzés. Ha $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ egy felosztás, akkor a térfogatot $\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\,\pi f^2(c_k)$ összeggel közelíthetjük, ahol $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tetszőleges.
(Ez hengerek térfogatának összege, ahol egy henger alapkörének sugara $f(c_k)$, magassága $x_k - x_{k-1}$.) Ez éppen a $\pi f^2(x)$ függvény egy integrálközelítő összege.



Forgástestek felszíne

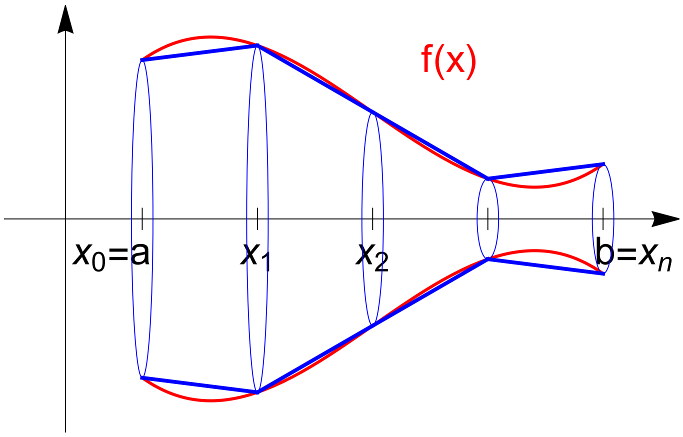
Tétel. Az $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos, nemnegatív függvény grafikonját megforgatjuk az x tengely körül. Az így kapott forgástest felszíne

$$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Megjegyzés. Ha $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ egy felosztás, akkor a forgástest felszíne az alábbi összeggel közelíthető:

$$\sum_{k=1}^{n}\pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1+(f'(c_k))^2}\,(x_k - x_{k-1})$$

ahol $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ a Lagrange-féle középértéktétle miatt létezik, ha f deriválható. (Geometriailag ez azt jelenti, hogy a felszínt csonkakúpok palástjainak területösszegével közelítjük.
Ha f folytonosan differenciálható, akkor $f(x_{k-1}) + f(x_k) \approx 2\, f(c_k)$, így a fenti összeg éppen az $2\,\pi\, f(x)\,\sqrt{1+(f'(x))^2}$ függvény egy integrálközelítő összege.



Feladat

Legyen $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \le x \le r$. Ekkor f grafikonját az x tengely körül megforgatva egy r sugarú gömböt kapunk. Számítsuk ki a gömb felszínét és térfogatát.

Megoldás. 1. A térfogat: $V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$

- az integrandus: $(f(x))^2 = r^2 - x^2$
- a gömb térfogata: $V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \pi\left(\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right) = \frac{4\, r^3\, \pi}{3}$

2. A felszín: $A = 2\,\pi \int_a^b f(x)\,\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$

- f deriváltja: $f'(x) = \left((r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2\,x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$
- $1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$
- az integrandus: $f(x)\,\sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} = r$
- a gömb felszíne: $A = 2\,\pi \int_{-r}^{r} r\, dx = 2\,\pi \cdot [r\,x]_{-r}^{r} = 2\,\pi\left(r^2 - (-r^2)\right) = 4\,r^2\,\pi$