Matematika MC, 9. előadás

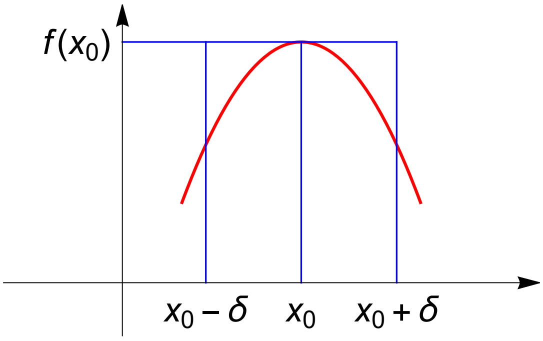
Szükséges feltétel a lokális szélsőérték létezésére

Definíció. f-nek lokális $\begin{cases} \text{minimuma} \\ \text{maximuma} \end{cases}$ van az értelmezési tartomány x_0 belső pontjában, ha

van olyan $r > 0$, hogy minden $x \in (x_0 - r,\, x_0 + r)$ esetén $\begin{cases} f(x) \geq f(x_0) \\ f(x) \leq f(x_0) \end{cases}$.

Tétel. Ha az f függvény differenciálható az $x_0 \in D_f$ belső pontban és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f\,'(x_0) = 0$.

Geometriai jelentés: az $(x_0,\, f(x_0))$ pontban vízszintes érintő húzható f grafikonjához.



Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f-nek lokális maximuma van az $x_0 \in D_f$ belső pontban.

Ha $x_0 - \delta < x < x_0$, akkor $f(x) \leq f(x_0) \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \implies \boldsymbol{f\,'(x_0)} = f_-'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0-} \dfrac{f(x) - f(ax_0)}{x - x_0}\ \boldsymbol{\geq 0}$

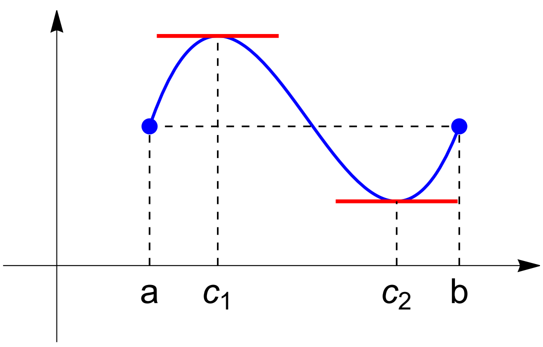
Ha $x_0 < x < x_0 + \delta$, akkor $f(x) \leq f(x_0) \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \implies \boldsymbol{f\,'(x_0)} = f_+'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\ \boldsymbol{\leq 0}$

$\implies \boldsymbol{f\,'(x_0) = 0}$.

A differenciálszámítás középértéktételei

Rolle-tétel: Ha az f függvény folytonos $[a,\, b]$-n, differenciálható $(a,\, b)$-n és $f(a) = f(b)$, akkor létezik olyan $c \in (a,\, b)$ szám, melyre $f\,'(c) = 0$.

Geometriai jelentés: Van olyan pont az intervallum belsejében, ahol az érintő vízszines.



Bizonyítás. f folytonos az $[a,\, b]$-n $\implies$ Weierstrass 2. tétele miatt van minimuma és maximuma.

1) Ha mindkét szélsőértéket a végpontokban veszi fel, akkor

$f(a) = f(b) = f(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén $\Longrightarrow$ f konstans

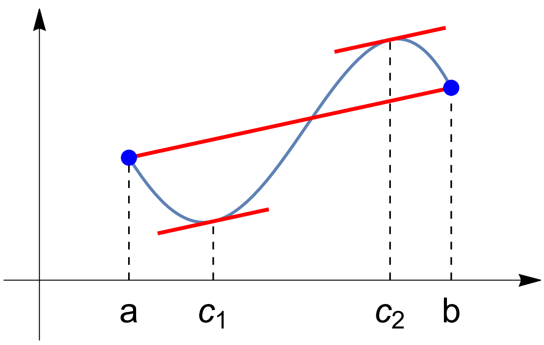
$\Longrightarrow$ $f'(c) = 0$ minden $c \in (a, b)$-re.

2) Ha valamelyiket az intervallum belsejében veszi fel, akkor ott az előző tétel miatt $f'(c) = 0$ (c a szélsőértékhely).

Lagrange-féle középértéktétel:

Ha az f függvény folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n, akkor létezik olyan $c \in (a, b)$ szám, melyre $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Geometriai jelentés: Van olyan pont az intervallum belsejében, ahol az érintő meredeksége megegyezik a grafikon végpontjait összekötő szakasz meredekségével.



Bizonyítás. Az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon átmenő szelő egyenlete:

$$y = h_{a,b}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Legyen $g(x) = f(x) - h_{a,b}(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$. Ekkor

1) g folytonos $[a, b]$-n
2) g differenciálható (a, b)-n
3) $g(a) = g(b) = 0$

$\Longrightarrow$ Rolle tétele szerint van olyan $c \in (a, b)$, melyre $g'(c) = 0$

$$\Longrightarrow g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Cauchy-féle középértéktétel:

Ha f és g folytonos $[a, b]$-n, differenciálható (a, b)-n és $g'(x) \neq 0$ minden $x \in (a, b)$ esetén, akkor létezik olyan $c \in (a, b)$, melyre $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Megjegyzés. A Lagrange-féle középértéktétel a Cauchy-féle középértéktétel speciális esete ($g(x) = x$), a Rolle-tétel pedig a Lagrange speciális esete.

Tétel. Ha f folytonos $[a, b]$-n, differenciálható (a, b)-n és minden $x \in (a, b)$ esetén $f'(x) = 0$, akkor $f(x) = c$ (konstans) minden $x \in [a, b]$ esetén.

Bizonyítás. A Lagrange-féle középértéktétel szerint minden $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ esetén létezik $c \in (x_1, x_2)$,

$$\text{melyre } f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0 \implies f(x_1) = f(x_2) \text{ minden } x_1 \neq x_2 \text{ esetén} \implies f \text{ konstans.}$$

Megjegyzés. Ha D_f nem intervallum, akkor az állítás nem igaz.

Tétel (Az integrálszámítás 1. alaptétele).

Ha f és g folytonos $[a, b]$-n, differenciálható (a, b)-n és $f'(x) = g'(x)$, ha $x \in (a, b)$, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, melyre $f(x) = g(x) + c$ minden $x \in [a, b]$ esetén.

Tehát csak egy állandóban különböznek.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző tételt az $h(x) = f(x) - g(x)$ függvényre.

Nyílt intervallumon differenciálható függvények tulajdonságai

Megjegyzés. A nyílt intervallum $I = (a, b)$ lehet $I = (-\infty, \infty)$ is.

Definíció. • Az f függvény $\begin{cases} \text{monoton nő,} \\ \text{szigorúan monoton nő,} \end{cases}$ ha $x < y \implies \begin{cases} f(x) \leq f(y) \\ f(x) < f(y) \end{cases}$ $(x, y \in D_f)$.

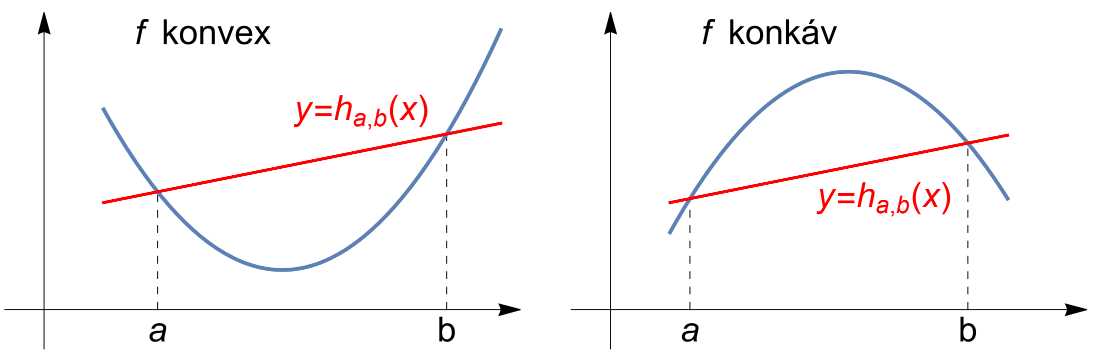
• Az f függvény $\begin{cases} \text{monoton csökken,} \\ \text{szigorúan monoton csökken,} \end{cases}$ ha $x < y \implies \begin{cases} f(x) \geq f(y) \\ f(x) > f(y) \end{cases}$ $(x, y \in D_f)$.

Definíció. Legyen $a, b \in I$, és legyen $h_{a,b}(x)$ az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon áthaladó húr.

Az f függvény $\begin{cases} \text{konvex} \\ \text{konkáv} \end{cases}$ az $I \subset D_f$ intervallumon, ha

$\forall\, a, b \in I,\ \ a < x < b \implies \begin{cases} f(x) \leq h_{a,b}(x) \\ f(x) \geq h_{a,b}(x) \end{cases}$, azaz a grafikon bármely két pontját összekötő húr

a grafikon $\begin{cases} \text{felett} \\ \text{alatt} \end{cases}$ halad.



Definíció: f-nek inflexiós pontja van x_0-ban, ha f folytonos x_0-ban, és itt konvex és konkáv szakaszok találkoznak.

Tétel. Ha f konvex az I nyílt intervallumon, akkor f folytonos I-n.

Megjegyzés. Ha f konvex egy zárt intervallumon, akkor csak az intervallum végpontjaiban lehet szakadása.

Tétel. Ha f differenciálható I-n:

1) f monoton nő $\Longleftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$
2) f szigorúan monoton nő $\Longleftarrow$ $f'(x) > 0$
3) f monoton csökken $\Longleftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$
4) f szigorúan monoton csökken $\Longleftarrow$ $f'(x) < 0$

Bizonyítás. (1)

(a) Ha f monoton növő, akkor $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ $\left(\dfrac{+}{+} \text{ vagy } \dfrac{-}{-} \text{ alakú}\right) \Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \geq 0.$

(b) Tegyük fel, hogy $f'(x) \geq 0$ minden $x \in I$ esetén. Legyen $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, és alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt az $[x_1, x_2]$ intervallumra. Ekkor létezik $c \in (x_1, x_2) \subset I$, melyre

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \geq 0 \Longrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

Tehát ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$, így f monoton növő az I intervallumon.

Megjegyzés. A 2) és 4) állítás megfordítása nem igaz, pl. $f(x) = x^3$ szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$-en, azonban $f'(x) > 0$ nem teljesül minden x-re, mivel $f'(x) = 3x^2 \Longrightarrow f'(0) = 0$.

Tétel. Ha f differenciálható I-n:

1) f' monoton nő $\Longleftrightarrow$ f konvex
2) f' monoton csökken $\Longleftrightarrow$ f konkáv

Tétel. Ha f differenciálható I-n:

1) $f'' \geq 0$ $\Longleftrightarrow$ f konvex
2) $f'' \leq 0$ $\Longleftrightarrow$ f konkáv

Megjegyzés. Az állítások igazak maradnak, ha I zárt és f a zárt intervallumban folytonos, nyíltban differenciálható.

Feladat

Adjuk meg azokat a nyílt intervallumokat, amelyeken az f függvény monoton növő, monoton csökkenő, konvex, illetve konkáv.

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{7}{2} x^2 + 6x$ b) $f(x) = e^{2x} - (4x+1)$

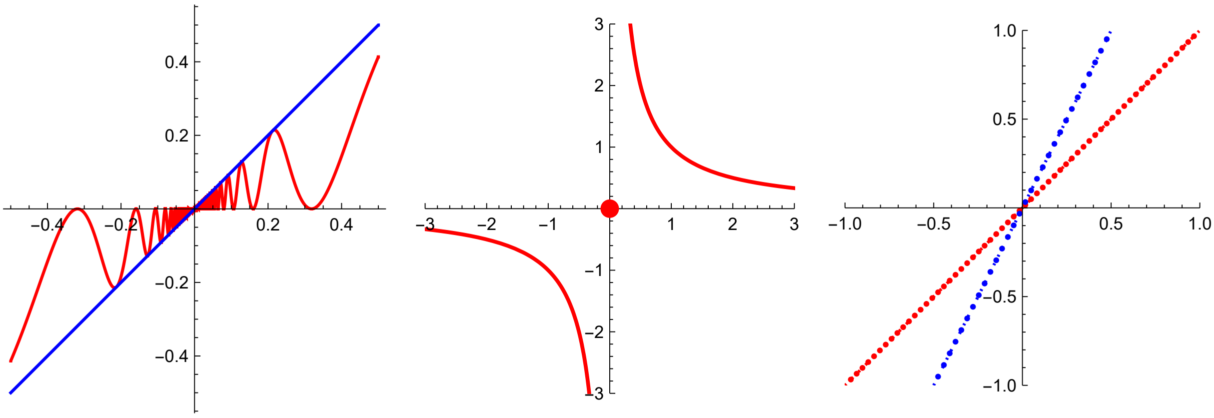
Megoldás: 176-177. oldal:
https://math.bme.hu/~tasnadi/merninf_anal_1/anal1_elm.pdf

4.6. Differenciálható függvények lokális tulajdonságai

Definícó. Azt mondjuk, hogy az f függvény $\begin{cases} \text{lokálisan növő} \\ \text{lokálisan csökkenő} \end{cases}$ az $x_0 \in D_f$ pontban, ha van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x, y \in D_f$, $x_0 - \delta < x < x_0 < y < x_0 + \delta$ esetén $\begin{cases} f(x) \le f(x_0) \le f(y) \\ f(x) \ge f(x_0) \ge f(y) \end{cases}$.

Megjegyzés.
(1) Ha f monoton nő (a, b)-n, akkor f minden $x_0 \in (a, b)$ esetén lokálisan növő x_0-ban.
(2) Ha f lokálisan növő **minden** $x_0 \in (a, b)$ pontban, akkor f monoton növő (a, b)-n.
(3) A következő függvények lokálisan növők $x_0 = 0$-ban, de az origónak nincs olyan környezete, ahol függvény növekedő lenne.

1. $f(x) = \begin{cases} x \sin^2 \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$ **2.** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$ **3.** $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 2x & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$



Tétel. Tegyük fel, hogy f differenciálható az x_0 pontban.
(1) Ha f lokálisan nő x_0-ban, akkor $f'(x_0) \ge 0$.
(2) Ha f lokálisan csökken x_0-ban, akkor $f'(x_0) \le 0$.
(3) Ha $f'(x_0) > 0$, akkor f lokálisan nő x_0-ban.
(4) Ha $f'(x_0) < 0$, akkor f lokálisan csökken x_0-ban.

Tétel. Tegyük fel, x_0 belső pontja f és f' értelmezési tartományának.
Differenciálható függvény esetén a lokális szélsőérték létezésének
1. szükséges feltétele: $f'(x_0) = 0$
2. elégséges feltétele:
   a) $f'(x_0) = 0$ és f' előjelet vált x_0-ban (tehát f' lokálisan csökken vagy lokálisan nő x_0-ban)
   b) Ha f kétszer differenciálható x_0-ban: $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$.
   ($f''(x_0) > 0$: lokális minimum, $f''(x_0) < 0$: lokális maximum)

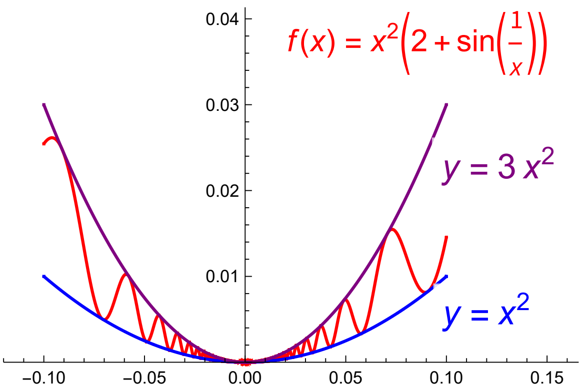
Megjegyzés. 2. a): a szélsőérték létezésének elsőrendű elégséges feltétele
2. b): a szélsőérték létezésének másodrendű elégséges feltétele

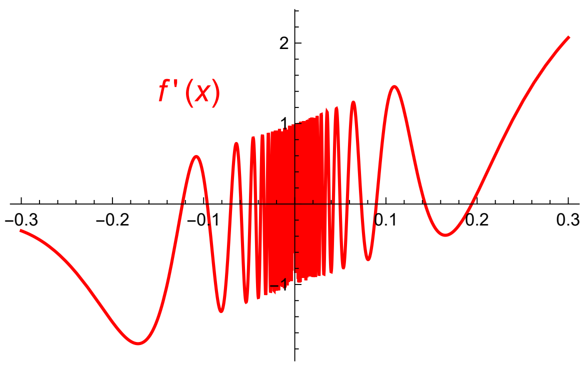
Megjegyzés.
f' előjelváltása x_0-ban csak elégséges, de nem szükséges feltétel a szélsőérték létezéséhez.

Legyen például $f(x) = \begin{cases} x^2\left(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$, ekkor f minden $x \in \mathbb{R}$ esetén differenciálható.

Az $x = 0$-ban: $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\left(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\left(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$
(mivel $0\cdot$korlátos alakú), így a szükséges feltétel teljesül $x_0 = 0$-ban.

f-nek lokális szélsőértéke (abszolút minimuma) van $x_0 = 0$-ban, de f' nem vált előjelet $x_0 = 0$-ban, mivel annak bármely környezetében felvesz pozitív és negatív értékeket is annak megfelelően, hogy minden ilyen környezetben vannak f -nek szigorúan monoton növekedő és csökkenő szakaszai.





Tétel. Tegyük fel, x_0 belső pontja f'' értelmezési tartományának.
Kétszer differenciálható függvény esetén az inflexiós pont létezésének
1. szükséges feltétele: $f''(x_0) = 0$
2. elégséges feltétele:
   a) $f''(x_0) = 0$ és f'' előjelet vált x_0-ban (tehát f'' lokálisan csökken vagy lokálisan nő x_0-ban)
   b) Ha f háromszor differenciálható x_0-ban: $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$.

Lokális szélsőérték, inflexiós pont és magasabbrendű deriváltak

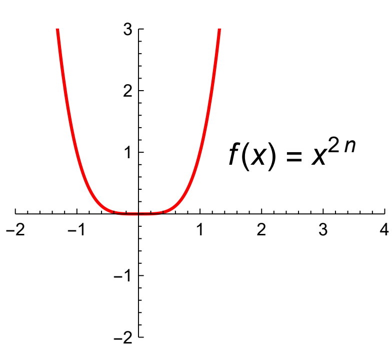
Megjegyzés. Ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) = 0$, akkor nem dönthető el, hogy f-nek van-e lokális szélsőértéke x_0-ban. Például
1) $f(x) = x^3$-nak nincs lokális szélsőértéke $x_0 = 0$-ban,
2) $f(x) = x^4$-nek lokális minimuma van $x_0 = 0$-ban,
3) $f(x) = -x^4$-nek lokális maximuma van $x_0 = 0$-ban,

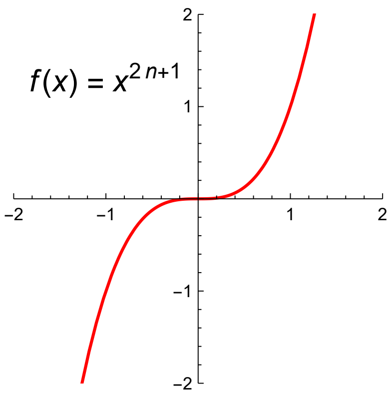
és mindegyik esetben $f'(0) = f''(0) = 0$.

Tétel. Tegyük fel, hogy az f függvény $2\,k$-szor differenciálható x_0-ban, $k \geq 1$.
Ha $f'(x_0) = \ldots = f^{(2k-1)}(x_0) = 0$ és $f^{(2k)}(x_0) \neq 0$, azaz az első el nem tűnő derivált páros rendű, akkor f-nek szigorú lokális szélsőértéke van x_0-ban.
($f^{(2k)}(x_0) > 0$: lokális minimum, $f^{(2k)}(x_0) < 0$: lokális maximum).

Tétel. Tegyük fel, hogy az f függvény $2k+1$-szer differenciálható x_0-ban, $k \geq 1$.
Ha $f''(x_0) = \ldots = f^{(2k)}(x_0) = 0$ és $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$, azaz az első el nem tűnő derivált páratlan rendű, akkor f-nek inflexiós pontja van x_0-ban.

Példa. $f(x) = x^n \implies f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\,x^{n-k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$
$f^{(n)}(x) = n!$
$\implies$ ha $x_0 = 0$, akkor $f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = n! > 0$
$\implies$ $x_0 = 0$-ban f-nek lokális minimuma van, ha n páros, és inflexiós pontja van, ha n páratlan





Szélsőérték zárt intervallumon

Megjegyzés. Ha f folytonos egy korlátos és zárt intervallumon, akkor Weierstrass tétele alapján f-nek van minimuma és maximuma. A lehetséges szélsőértékhelyek:
1) ahol f nem deriválható,
2) ahol f deriválható és a deriváltja 0,
3) az intervallum végpontjaiban.
Végül a szóbajövő értékek közül kell kiválasztani a legnagyobbat és a legkisebbet

Feladatok

Teljes függvényvizsgálat

16 feladat:
https://math.bme.hu/~nagyi/a1/fuggvenyvizsgalat.pdf

Szöveges szélsőértékfeladatok

1. Egy téglalap alakú, 1 × 1 méteres kartonpapírból felül nyitott, téglalap alakú dobozt hajtogatunk úgy, hogy a papír négy sarkából négy egybevágó négyzetet vágunk ki, majd felhajtjuk a doboz oldalait. Mekkora négyzeteket kell kivágnunk, hogy a doboz térfogata maximális legyen?

2. Ede akkora téglalap alakú folyóparti telket kap, amekkorát 1000 méternyi drótkerítéssel körül tud keríteni. (A folyópart egy egyenes, a teleknek erre kell illeszkednie. A telek folyóparti oldalára nem kell kerítés.) Milyen alakban kell felépítenie a kerítést, hogy a lehető legnagyobb területű legyen a telke?

3. Milyen méretezésű legyen az az 1 liter űrtartalmú konzervdoboz, amelyet minimális anyagfelhasználással akarunk elkészíteni?

(Megoldás: 189. oldal: https://math.bme.hu/~tasnadi/merninf_anal_1/anal1_elm.pdf)

További feladatok:
https://math.bme.hu/~nagyi/a1/szelsoertek.pdf