Matematika MC, 8. előadás

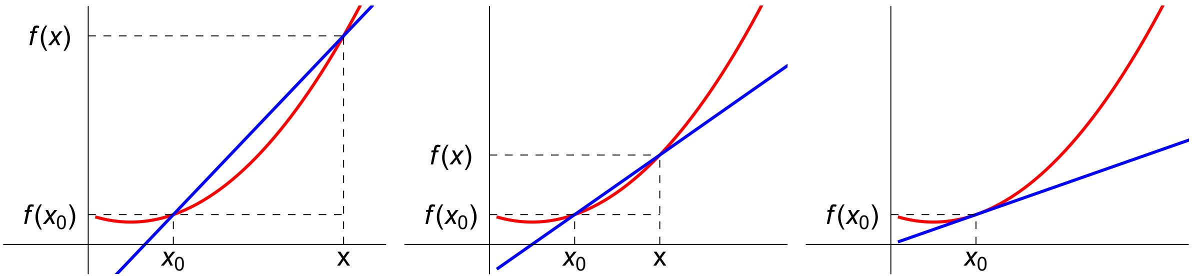
Differenciálszámítás

A derivált fogalma

Definíció. Tegyük fel, hogy x_0 belső pontja D_f-nek. Azt mondjuk, hogy az f függvény differenciálható (deriválható) az x_0 pontban, ha a következő határérték létezik és véges:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Az $f'(x_0) = \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}(x_0) \in \mathbb{R}$ szám az f függvény x_0 pontbeli deriváltja.



Megjegyzések.

1) A derivált geometriai jelentése: $f'(x_0)$ az f függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott érintő iránytangense.

2) Emlékeztető: Az $(x_0\ y_0)$ ponton átmenő m meredekségű egyenes egyenlete: $y - y_0 = m(x - x_0)$

3) Írjuk fel az f függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott érintő egyenletét. A fenti egyenletet átrendezve, és felhasználva, hogy $y_0 = f(x_0)$, $m = f'(x_0)$, kapjuk, hogy az érintő egyenlete: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Egyoldali deriváltak

Definíció. Az f függvény x_0 pontbeli bal oldali és jobb oldali deriváltja

$$f_-'(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{és} \quad f_+'(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ha ezek a határértékek léteznek és végesek.

Tétel. Tegyük fel, hogy x_0 belső pontja D_f-nek. Ekkor f pontosan akkor differenciálható x_0-ban, ha $f'(x_0) = f_-'(x_0) = f_+'(x_0)$

Definíció. Legyen $a < b$.

- f differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon, ha f minden $x \in (a, b)$ esetén differenciálható x-ben.
- f differenciálható az $[a, b]$ zárt intervallumon, ha f differenciálható (a, b)-n és $\exists\, f_+'(a),\ f_-'(a) \in \mathbb{R}$.
- Az f függvény deriváltfüggvénye: $f' : \{x \in D_f : \exists\, f'(x)\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$.

Példák

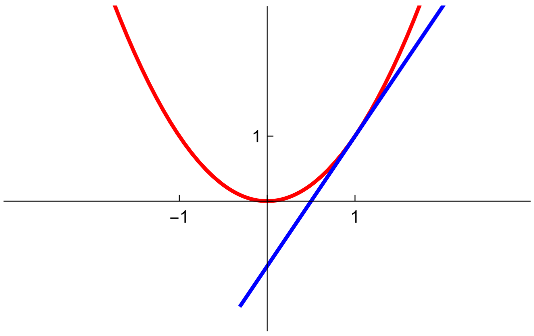
1) $f(x) = c \quad \Longrightarrow \quad f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{c - c}{x - x_0} = 0 \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}.$

2) $f(x) = x \quad \Longrightarrow \quad f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}.$

3) $f(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} (x + x_0) = 2\, x_0 \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}.$

4) $f(x) = x^3 \quad \Longrightarrow \quad f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(x - x_0)\left(x^2 + x\, x_0 + x_0^2\right)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \left(x^2 + x\, x_0 + x_0^2\right) = 3\, x_0^2 \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}.$

5) Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvény $x_0 = 1$ pontbeli érintőegyenesének egyenletét.
Mivel $f'(x) = 2\, x$, ezért $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, így az érintő egyenlete:
$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 + 2(x - 1) = 2\, x - 1.$



Kapcsolat a folytonossággal

Tétel. Ha az f függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) + f(x_0) \right) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0).$

Megjegyzés. A folytonosságból nem következik a deriválhatóág.

Például legyen $f(x) = |\, x \,| = \begin{cases} x & \text{ha } x \geq 0 \\ -x & \text{ha } x < 0 \end{cases}.$

Ekkor az $x_0 = 0$ pontban $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0 \\ -1 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow\ f_+'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1,\ f_-'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -1$

$\Longrightarrow$ mivel x_0 pontbeli jobb és bal oldali derivált különböző, ezért f nem deriválható az $x_0 = 0$ pontban.

Differenciálási szabályok

Tétel. Ha f és g differenciálható az x pontban és $c \in \mathbb{R}$, akkor $(c \cdot f)$, $(f \pm g)$ és $(f \cdot g)$ is differenciálható az x-ben, és

(1) $(c\,f)'(x) = c \cdot f'(x)$

(2) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

(3) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(4) Ha $g(x) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is differenciálható az x-ben, és $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Láncszabály

Tétel. Ha a g függvény differenciálható az x pontban és az f függvény differenciálható a $g(x)$ pontban, akkor az $f \circ g$ összetett függvény is differenciálható az x pontban, és $(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Az inverz függvény deriváltja

Tétel. Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos és szigorúan monoton az (a, b) nyílt intervallumon, differenciálható a $c \in (a, b)$ pontban és $f'(c) \neq 0$. Ekkor az f^{-1} inverz függvény differenciálható $f(c)$-ben, és $\left(f^{-1}\right)'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$

Elemi függvények deriváltjai

1. $f(x) = c\ \ (c \in \mathbb{R}) \implies f'(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$
2. $f(x) = x^\alpha \implies f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ x > 0$ vagy $\alpha \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R})$
3. $f(x) = a^x \implies f'(x) = a^x \ln a \quad (a > 0,\ x \in \mathbb{R})$ Speciálisan: $f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$
4. $f(x) = \log_a x \implies f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \quad (a, x > 0,\ a \neq 1)$ Speciálisan: $f(x) = \ln x \implies f'(x) = \frac{1}{x}$
5. $f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$
6. $f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R})$
7. $f(x) = \operatorname{tg} x \implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\cos x \neq 0)$
8. $f(x) = \operatorname{ctg} x \implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (\sin x \neq 0)$
9. $f(x) = \arcsin x \implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1)$
10. $f(x) = \arccos x \implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1)$
11. $f(x) = \operatorname{arctg} x \implies f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$
12. $f(x) = \operatorname{arcctg} x \implies f'(x) = -\frac{1}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$

Néhány bizonyítás

1. Igazoljuk, hogy ha $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, akkor $f'(x) = n\, x^{n-1}$.

Megoldás. $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = \lim\limits_{x\to a}\left(x^{n-1} + x^{n-2}\, a + \ldots + x\, a^{n-2} + a^{n-1}\right) = n\, a^{n-1}$

2. Igazoljuk, hogy ha $f(x) = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R},\ x > 0)$, akkor $f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$.

Megoldás. A láncszabály alapján $f'(x) = (x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \dfrac{1}{x} = x^\alpha \cdot \dfrac{\alpha}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}$

3. Igazoljuk, hogy $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ and $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Megoldás. $(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \dfrac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

4. Igazoljuk, hogy ha $f(x) = a^x$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

Megoldás. A láncszabály alapján $f'(x) = (a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$

5. Igazoljuk, hogy ha $f(x) = \ln x$ is $(x > 0)$, akkor $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Megoldás. Használjuk fel az inverz deriválási szabályát: $f(x) = \ln x$, $f^{-1}(x) = e^x$, $\left(f^{-1}\right)'(x) = e^x$

$\Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\left(f^{-1}\right)'(f(x))} = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$

6. Igazoljuk, hogy ha $f(x) = \log_a x$ $(0 < a \neq 1,\ x > 0)$, akkor $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Megoldás. $f'(x) = (\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x}$

Néhány kidolgozott feladat: 4.2 fejezet, 6-7. feladat, 55-57. oldal
https://math.bme.hu/~tasnadi/merninf_anal_1/anal1_gyak.pdf

Feladatok

Deriválási szabályok

1) Deriváljuk a következő függvényeket:

1. $f(x) = x^5 + \frac{1}{3\,x^{2022}}$	2. $f(x) = x^2\left(\sqrt{x} - \frac{x-1}{x^3}\right)$	3. $f(x) = \mid x \mid$	4. $f(x) = (1 + x^2)\,e^x$
5. $f(x) = x^3 \sin x$	6. $f(x) = x \sin x \cos x$	7. $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$	8. $f(x) = \frac{x^2 - 3\,x}{x^4 + 1}$
9. $f(x) = \frac{\cos x}{x^3}$	10. $f(x) = \frac{\sin x}{x + \cos x}$	11. $f(x) = (1 + x^2)^4$	12. $f(x) = \sqrt{1 + x^6}$
13. $f(x) = (\sin x)^3$	14. $f(x) = \sin(x^2)$	15. $f(x) = \sin^3(x^2)$	16. $f(x) = \cos^2(2\,x + 3)$
17. $f(x) = x\,e^{3\,x} - e^{-x^2}$	18. $f(x) = \sqrt{1 + e^{3\,x}}$	19. $f(x) = (\cos^3 x + 3)^5$	20. $f(x) = 2^x$
21. $f(x) = \ln x + \log_2 x$	22. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$	23. $f(x) = \arcsin(2\,x)$	24. $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$

További gyakorló feladatok:
https://math.bme.hu/~nagyi/a1/derivalas.pdf

Érintő egyenlete

2) Írjuk fel az alábbi függvények x_0 pontbeli érintőjének egyenletét:

a) $f(x) = x^2, \quad x_0 = 3$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x_0 = 2$ c) $f(x) = \sin(x^2), \quad x_0 = \pi$

Fizikai példák

3) Jelölje $x(t)$ egy szabadon eső test magasságát a $t \in \mathbb{R}$ idő függvényében. Ekkor a test sebessége $x'(t)$, gyorsulása $x''(t)$. Ha a légellenállástól eltekintünk, akkor a test mozgásegyenlete $m\,x''(t) = -m\,g$, ahol m a test tömege, g a gravitációs gyorsulás, $-m\,g$ a nehézségi erő.
Mutassuk meg, hogy minden $h_0, v_0 \in \mathbb{R}$ esetén az

$$x(t) = -\frac{g}{2}\,t^2 + v_0\,t + h_0$$

függvényre teljesül az $x''(t) = -g$ egyenlet és az $x(0) = h_0, x'(0) = v_0$ ún. kezdeti feltételek, ahol h_0 a test magassága, v_0 pedig a test kezdősebessége a $t = 0$ időpontban.

4) Egy radioaktív izotóp bomlási sebessége egyenesen arányos a meglévő tömeggel, így a t idő függvényében a tömeg $N(t)$ értékét az $N'(t) = -\lambda\,N(t)$ egyenlet határozza meg, ahol $\lambda > 0$ az ún. bomlási állandó. Igazoljuk, hogy az $N(t) = c\,e^{-\lambda\,t}$ függvényre teljesül a fenti egyenlet, ahol $c > 0$ tetszőleges konstans.

5) A sütőből kivett pizza hőmérsékletét az idő függvényében az $y(t) = H + c \cdot e^{-k t}$ függvény adja meg, ahol az időt percben mérjük. H, c és k pozitív konstansok, H a környezet hőmérséklete °C-ban, k a lehűlés sebességére jellemző állandó.
a) Igazoljuk, hogy erre a függvényre teljesül az alábbi egyenlet:

$$y'(t) = k(H - y(t)).$$

Ez az egyenlet a Newton-féle lehűlési törvény alapján azt fejezi ki, hogy egy test lehűlési sebessége egyenesen arányos a test és a környezete hőmérsékletének különbségével.

b) Ha a pizza kezdetben (azaz a $t = 0$ időpontban) 120 °C-os, a levegő $H = 30$ °C-os és $k = 0.0366$, akkor mekkora lesz a pizza hőmérséklete 60 perc múlva?

6) Egy rugóra függesztett, harmonikus rezgőmozgást végző test mozgásegyenlete $m\,x''(t) = -D\,x(t)$, ahol $x(t)$ a test kitérése a t idő függvényében, $x''(t)$ a test gyorsulása, $m > 0$ a test tömege, $D > 0$ a rugóállandó, $-D\,x(t)$ a testre ható rugóerő. A paramétereket SI-ben adjuk meg, legyen $m = 1$ és $D = 4$, ekkor a mozgásegyenlet $x''(t) + 4\,x(t) = 0$. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvény megoldása az egyenletnek (a, $b \in \mathbb{R}$):

$$x(t) = a \sin(2\,t) + b \cos(2\,t).$$

7) Ha a Holdon felfelé elhajítanánk egy követ 24 m/s kezdősebességgel, akkor t másodperc múlva $x(t) = -0.8\,t^2 + 24\,t$ magasan lenne.
a) Írjuk fel a kő sebességét az idő függvényében.
b) Milyen magasra repül a kő?
c) Mekkora a Holdon a gravitációs gyorsulás?
d) Mennyi idő alatt esik vissza?