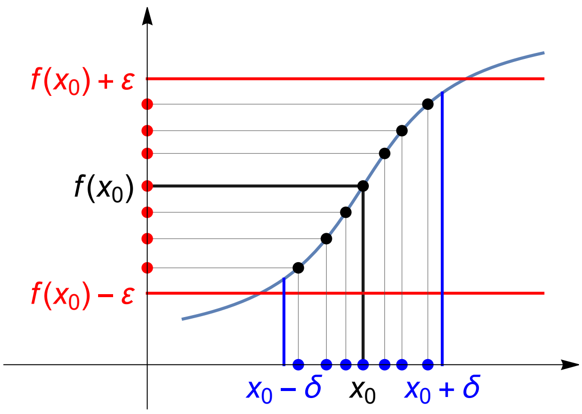
# Matematika MC, 7. előadás

# Folytonos függvények

## Definíciók

**Definíció.** Az $f$ függvény folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $x \in D_f$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

**Megjegyzés:** $|x - x_0| < \delta$ jelentése: $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.




**Definíció.** Az $f$ függvény $\left\{\begin{array}{l}\text{balról folytonos}\\ \text{jobbról folytonos}\end{array}\right.$ az $x_0 \in D_f$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $x \in D_f$ és $\left\{\begin{array}{l}x_0 - \delta < x \le x_0\\ x_0 \le x < x_0 + \delta\end{array}\right.$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

**Megjegyzés.** Az $f$ függvény pontosan akkor folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha balról és jobbról is folytonos $x_0$-ban.

**Tétel.**
- Ha $x_0 \in D_f$ torlódási pontja is $D_f$-nek, akkor $f$ pontosan akkor folytonos $x_0$-ban, ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Ha $x_0 \in D_f$ torlódási pontja is $D_f \cap (-\infty, x_0]$-nak, illetve $D_f \cap [x_0, \infty)$-nek, akkor $f$ pontosan akkor folytonos balról, illetve jobbról az $x_0$-ban, ha

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0), \quad \text{illetve} \quad \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0).$$

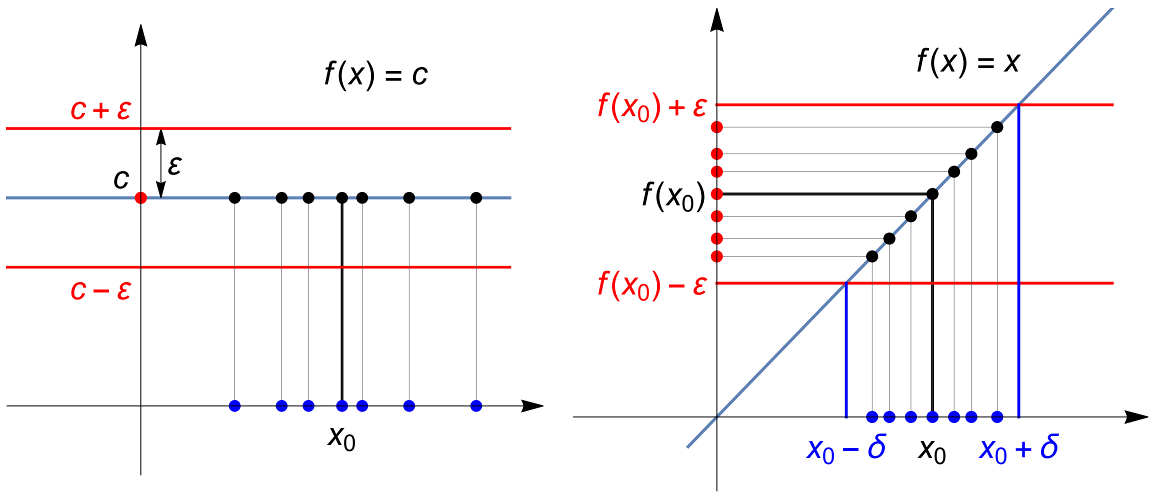
**Definíció.**
- Azt mondjuk, hogy az $f$ függvény folytonos az $A \subset D_f$ halmazon, ha annak minden pontjában folytonos.
- Speciálisan az $f$ függvény folytonosnak nevezzük, ha folytonos $D_f$-en.

**Megjegyzés:** Ugyanezt értelmezhetjük féloldali folytonosságra is.

## Példák

1. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = c$ konstans függvény minden $x_0 \in D_f$ pontban folytonos.

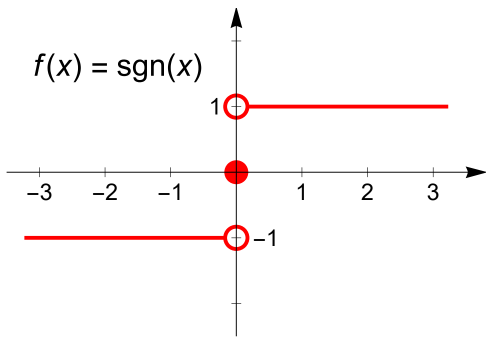
**Megoldás.** Ha $\varepsilon > 0$ adott, akkor minden $x_0 \in D_f$ esetén bármely $\delta > 0$ választás megfelelő.
Ugyanis ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.




2. Mutassuk meg, hogy az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.

**Megoldás.** Ha $\varepsilon > 0$ adott, akkor a $\delta = \varepsilon$ választás minden $x_0 \in D_f$ esetén megfelelő. Ugyanis ha
$|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

3. Az előjelfüggvény vagy szignumfüggvény: $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$ mely pontokban folytonos?




**Megoldás.** • Az origón kívül a függvény folytonos (a bizonyítás hasonló az 1. feladathoz).

• Az origóban a függvény nem folytonos, pl. $\varepsilon = \frac{1}{2}$-hez nem található megfelelő $\delta$.

Ugyanis minden $x \neq 0$ esetén $|\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)| = 1 > \varepsilon$

Vagy: A függvény a 0-ban jobbról nem folytonos, mivel a jobb oldali határértéke nem egyenlő a 0-beli helyettesítési értékkel $\left(\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1 \neq \operatorname{sgn}(0) = 0\right)$. Hasonlóan: ebben a pontban balról sem folytonos. Így a függvény nem folytonos az origóban.

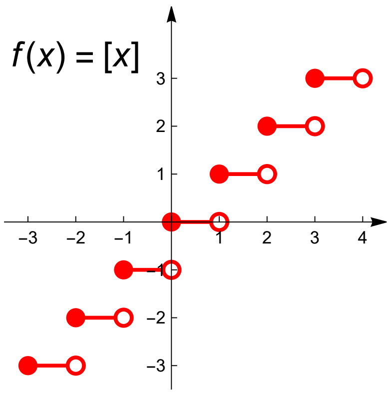
**Definíció.** Az $x \in \mathbb{R}$ szám

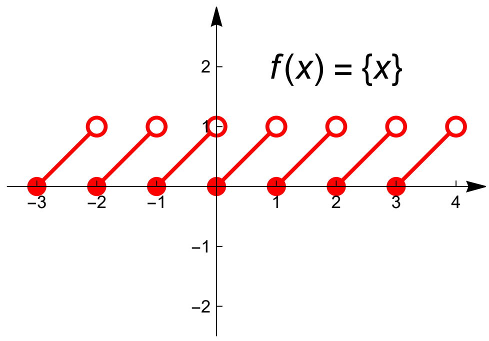
- egészrésze: $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$,
- törtrésze: $\{x\} = x - [x]$.

Példa: • $[5] = 5$, $[2.3] = 2$, $[-3.4] = -4$, $[\pi] = 3$

• $\{5\} = 5 - 5 = 0$, $\{2.3\} = 2.3 - 2 = 0.3$, $\{-3.4\} = -3.4 - (-4) = 0.6$

Az egészrészfüggvény és törtrészfüggvény grafikonja:




4. Mely pontokban folytonos az $f(x) = [x]$ egészrészfüggvény?

**Megoldás.** • Ha $x_0 \notin \mathbb{Z}$, akkor $f$ folytonos $x_0$-ban, mivel $x_0$ egy alkalmas környezetében $f$ konstans (a bizonyítás hasonló az 1. feladathoz).

• Ha $x_0 \in \mathbb{Z}$, akkor a $f$ jobbról folytonos $x_0$-ban, de balról nem, így nem folytonos $x_0$-ban. Pl. ha $x_0 = 2$, akkor $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = f(2) = 2$, de $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = f(1) = 1 \neq f(2)$.

## Átviteli elv

**Tétel.** Az $f$ függvény pontosan akkor folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha minden, $x_0$-hoz konvergáló $D_f$-beli $(x_n)$ sorozatra $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.

## Példák

1. Legyen $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ az úgynevezett Dirichlet-függvény. Hol folytonos $f$?

**Megoldás.** A Dirichlet-függvény sehol sem folytonos.

- Ha $x_0$ racionális, akkor legyen $(x_n)$ egy irracionális számokból álló sorozat, amelyre $x_n \longrightarrow x_0$. Ekkor $f(x_n) = 0 \longrightarrow 0 \neq 1 = f(x_0)$.
- Ha $x_0$ irracionális, akkor legyen $(x_n)$ egy racionális számokból álló sorozat, amelyre $x_n \longrightarrow x_0$. Ekkor $f(x_n) = 1 \longrightarrow 1 \neq 0 = f(x_0)$.

2.* Mutassunk példát olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényre, amely egyetlen pontban folytonos.

**Megoldás.** Legyen pl. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Ekkor $f$ csak a 0-ban folytonos.

Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) = |x|$, ezért
$x_n \longrightarrow 0 \iff |x_n| \longrightarrow 0 \iff |f(x_n)| \longrightarrow 0 \iff f(x_n) \longrightarrow 0.$

Hasonló példák: $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 2x, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ stb.

## Folytonosság és műveletek

**Tétel.** Ha az $f$ és $g$ függvény folytonos az $x_0 \in D_f \cap D_g$ pontban, akkor

$c \cdot f, f + g, f - g, f \cdot g$ és ha $g(x_0) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}$ is folytonos $x_0$-ban.

## Összetett függvény folytonossága

**Tétel.** Ha $g$ folytonos az $x_0 \in D_g$ pontban, és $f$ folytonos a $g(x_0) \in D_f$ pontban, akkor $f \circ g$ is folytonos $x_0$-ban.

## Inverz függvény folytonossága

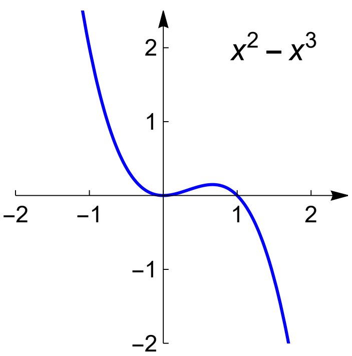
**Tétel.** Ha $f$ folytonos, szigorúan monoton és $D_f$ intervallum, akkor $f$ inverze, azaz $f^{-1}$ is folytonos.

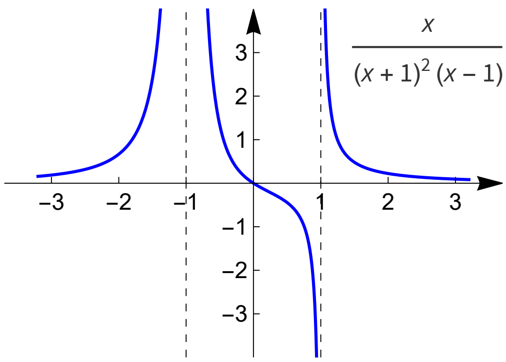
## Példák

**Tétel.** Az alábbi, ún. **elemi függvények** folytonosak:
- hatványfüggvények: $x^\alpha$
- exponenciális függvények: $a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
- logaritmusfüggvények: $\log_a(x)$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
- trigonometrikus függvények és inverzeik:
  $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{tg}(x)$, $\mathrm{ctg}(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\mathrm{arctg}(x)$, $\mathrm{arcctg}(x)$

**Tétel.** A polinomok és a racionális törtfüggvények folytonosak.

**Példák: 1.** Az $f(x) = x^2 - x^3$ függvény minden $x \in \mathbb{R}$ esetén folytonos.



**2.** Az $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2\,(x-1)}$ függvény minden $x\in D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,\,1\}$ esetén folytonos.

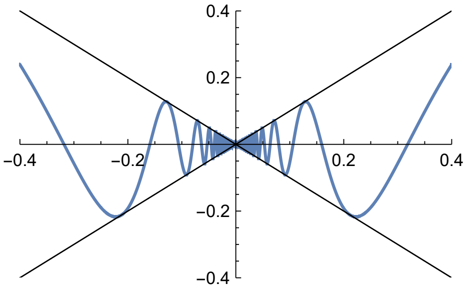
Szakadási pontok: $x_1=-1$ és $x_2=1$. A határérték a szakadási pontokban:

- $\lim\limits_{x\to -1\pm 0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1\pm 0}\dfrac{1}{(x+1)^2}\cdot\dfrac{x}{(x-1)}=\dfrac{1}{0+}\cdot\dfrac{-1}{-2}=\infty\cdot\dfrac{1}{2}=\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{(x-1)}\cdot\dfrac{x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{0+}\cdot\dfrac{1}{4}=\infty\cdot\dfrac{1}{4}=\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{(x-1)}\cdot\dfrac{x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{0-}\cdot\dfrac{1}{4}=(-\infty)\cdot\dfrac{1}{4}=-\infty$

**3.** Mutassuk meg, hogy az $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{if } x\neq 0\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$ függvény minden $x\in\mathbb{R}$ esetén folytonos.

**Megoldás.** • Ha $x\neq 0$, akkor $f$ folytonos, mivel folytonos függvények összetétele.

• Ha $x=0$, akkor $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=0=f(0)$, mivel $x\longrightarrow 0$ és $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ korlátos, ezért a szorzat szintén 0-hoz tart.




**4.** Folytonos függvények pl.: $f(x)=\sqrt{3+e^x\cdot x^4+\left(2+\sin\left(x^2\right)\right)^3}$, $\quad g(x)=\ln\left(2+e^{x^2}\right)+\dfrac{\cos(\operatorname{arctg}(x))}{\sqrt{1+x^2}}$

## Szakadási pontok osztályozása

**Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $f$ függvények szakadása van az $x_0\in\mathbb{R}$ pontban, ha $x_0$ torlódási pontja $D_f$-nek, és $f$ nem folytonos $x_0$-ban. Ilyenkor az $x_0$-t az $f$ szakadási helyének nevezzük. A szakadási helyeket a következőképpen osztályozzuk.

1. Elsőfajú szakadás:

   a) megszüntethető szakadás, ha létezik $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)\in\mathbb{R}$, de nem egyenlő $f(x_0)$-val vagy $f(x_0)$ nem létezik

   b) véges ugrás, ha létezik $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)\in\mathbb{R}$ és $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)\in\mathbb{R}$, de nem egyenlőek

2. Másodfajú szakadás: ha nem elsőfajú.

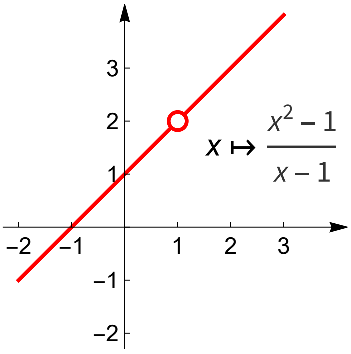
**Megjegyzés:** 1. Az elsőfajú szakadásnál mindkét egyoldali határérték létezik és véges.

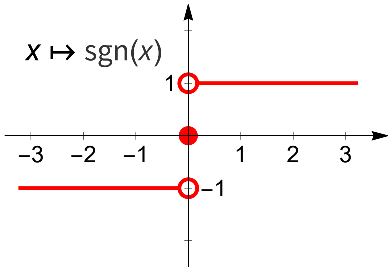
2. A másodfajú szakadásnál a két egyoldali határérték közül legalább az egyik nem létezik, vagy létezik, de nem véges.

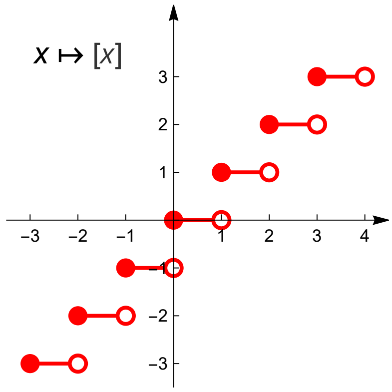
## Példák

### 1. Elsőfajú szakadás

a) Az $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x-1}$ függvénynek megszüntethető szakadása van az $x_0 = 1$-ben



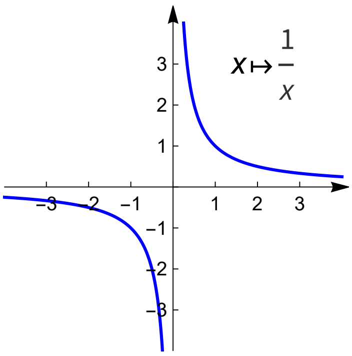



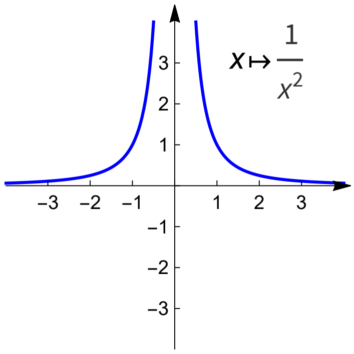

b) A szignumfüggvénynek véges ugrása van a 0-ban.

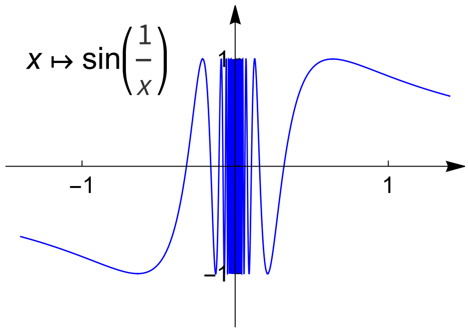
c) Az $x \mapsto [x]$ egészrészfüggvénynek minden $x \in \mathbb{Z}$ egész helyen véges ugrása van.

### 2. Másodfajú szakadás

a) Az $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ függvénynek másodfajú szakadása van a 0-ban.



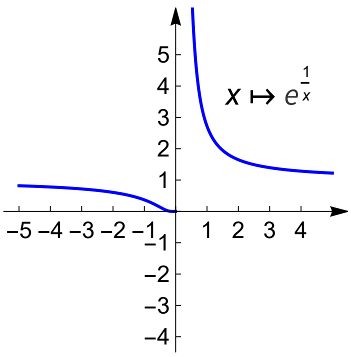




b) A Dirichlet-függvénynek minden $x \in \mathbb{R}$ pontban másodfajú szakadása van.

c) Az $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ függvénynek másodfajú szakadása van a 0-ban.

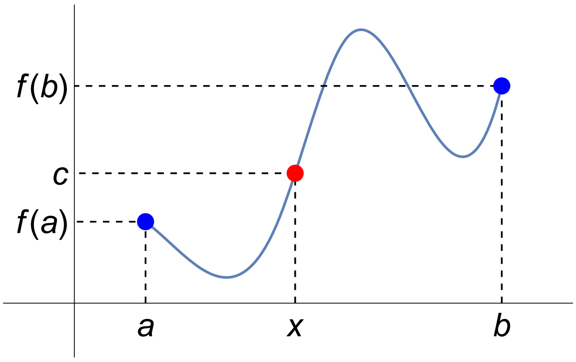
- Ha $x \longrightarrow 0+$, akkor $\dfrac{1}{x} \longrightarrow \infty$, és mivel $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$, ezért $\lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$.
- Ha $x \longrightarrow 0-$, akkor $\dfrac{1}{x} \longrightarrow -\infty$, és mivel $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$, ezért $\lim\limits_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

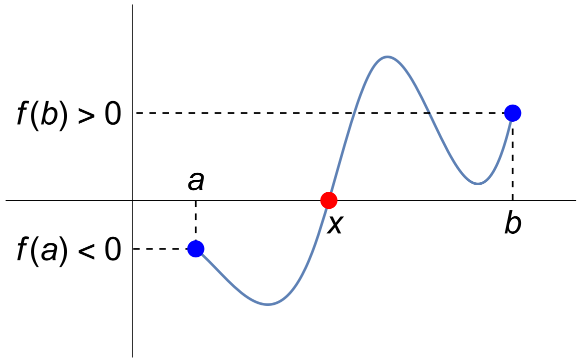


# Zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

## Bolzano tétele

**Bolzano-tétel:** Ha az $f$ függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon és $f(a) < c < f(b)$, akkor létezik olyan $x \in [a, b]$, hogy $f(x) = c$, azaz a függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső $c$ értéket felvesz $[a, b]$-ben.




**1. következmény:** Ha az $f$ függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon és $f(a) f(b) < 0$, vagyis $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelű, akkor az $f(x) = 0$ egyenletnek legalább egy gyöke van az $(a, b)$ nyílt intervallumon.

Mivel $c = 0$ az $f(a)$ és $f(b)$ függvényértékek közé esik, ezért a Bolzano-tétel értelmében van olyan $x \in (a, b)$, hogy $f(x) = 0$, tehát $x$ gyöke az egyenletnek.
Megjegyzés: Az 1. következmény ekvivalens a Bolzano-tétellel.

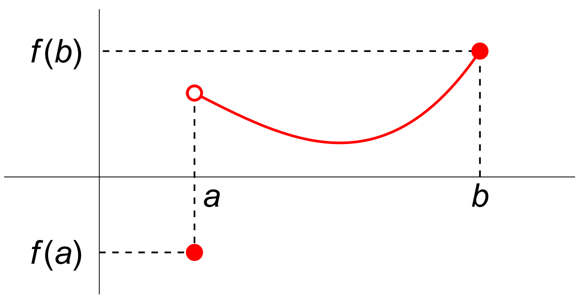
**2. következmény:** Páratlan fokszámú polinomnak van legalább egy valós gyöke.

**Bizonyítás:** Legyen $f(x) = a_{2k+1} x^{2k+1} + a_{2k} x^{2k} + \ldots + a_1 x + a_0$, és legyen $a_{2k+1} > 0$.

$\Longrightarrow$
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, ezért van olyan $b$, melyre $f(b) > 1$, és
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, ezért van olyan $a$, melyre $f(a) < -1$.

A polinomok mindenütt folytonosak, így az $[a, b]$ zárt intervallumon is, és $f(a) f(b) < 0$.
Így az 1. következény szerint van olyan $x \in (a, b)$, melyre $f(x) = 0$.

**Megjegyzés:** Ha az $f$ függvény nem folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, akkor a tétel nem igaz. Például az alábbi ábrán látható függvény esetében $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelű, de $f$ nem folytonos az $a$ pontban, és nem veszi fel a nulla értéken az $(a, b)$-n.



## Alkalmazás

**Példa.** Határozzuk meg az $f(x) = x^3 + 4x^2 - 6x - 2$ polinom egyik gyökét.

**Megoldás.** Intervallumfelezéses eljárást alkalmazunk.

1) $f(0) = -2 < 0,\ f(2) = 10 > 0 \Longrightarrow f$-nek van gyöke a $[0, 2]$ intervallumon.

Felezzük meg az intervallumot, azaz nézzük meg $f$ előjelét az $x = \frac{0+2}{2} = 1$ helyen.

2) $f(1) = -3 < 0,\ f(2) = 10 > 0 \Longrightarrow f$-nek van gyöke az $[1, 2]$ intervallumon.

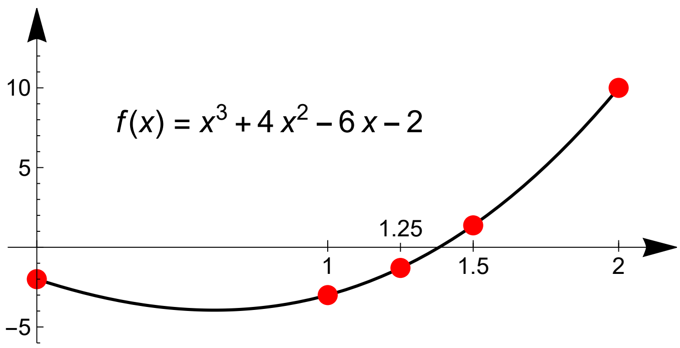
Felezzük tovább az intervallumot, azaz nézzük meg $f$ előjelét az $x = \frac{1+2}{2} = 1.5$ helyen.

3) $f(1) = -3 < 0,\ f(1.5) = 1.375 > 0 \Longrightarrow f$-nek van gyöke az $[1, 1.5]$ intervallumon.

Felezzük az tovább az intervallumot, azaz nézzük meg $f$ előjelét az $x = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$ helyen.

4) $f(1.25) \approx -1.29688 < 0,\ f(1.5) = 1.375 > 0 \Longrightarrow f$-nek van gyöke az $[1.25, 1.5]$ intervallumon.

Az eljárást tovább folytatva, a gyök közelítőleg meghatározható, értéke $\approx 1.38318$.




**Példa.** Mutassuk meg, hogy a $2^x = x^2 + \lg(x)$ egyenletnek van valós megoldása.

**Megoldás.** Rendezzük nullára az egyenletet, és tekintsük az $f(x) = 2^x - x^2 - \lg(x)$ függvényt.
Azt kell megmutatnunk, van olyan $x$ valós szám, amelyre $f(x) = 0$.
Például

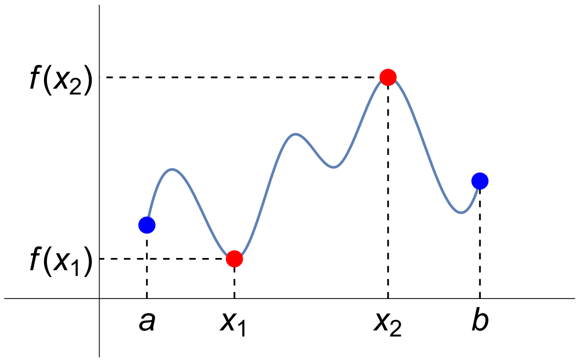
- $f(1) = 2 - 1 - 0 = 1 > 0$
- $f(3) = 8 - 9 - \lg(3) \approx -1.47712 < 0$

$\Longrightarrow$ a Bolzano-tétel alapján $f$-nek van gyöke az $(1, 3)$ intervallumban, így az egyenletnek van valós megoldása.

## Weierstrass tételei

**Tétel (Weierstrass 1. tétele):**
Ha az $f$ függvény folytonos az $[a, b]$ (korlátos és zárt) intervallumon, akkor ott $f$ korlátos.

**Tétel (Weierstrass 2. tétele):**
Ha az $f$ függvény folytonos az $[a, b]$ (korlátos és zárt) intervallumon, akkor ott van minimuma és maximuma, azaz létezik olyan $x_1, x_2 \in [a, b]$, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$.




**Megjegyzés:** Ha a függvény nem folytonos vagy az invervallum nem korlátos vagy nem zárt, akkor a tétel nem igaz. Legyen például $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ és vizsgáljuk $f$-et a következő három intervallumon.

**a)** A $(0, 1]$ intervallum korlátos, de **nem zárt**. Itt $f$ folytonos, de felülről nem korlátos, így nincs maximuma.

**b)** A $[-1, 1]$ intervallum korlátos és zárt, de itt $f$ **nem folytonos**, alulról és felülről nem korlátos, így nincs minimuma és maximuma.

**c)** Az $[1, \infty)$ intervallum **nem korlátos**, itt $f$ folytonos, de nincs minimuma.