Matematika MC, 6. előadás

Függvények határértéke

Definíciók

Definíció. Ha $x_0 \in \mathbb{R}$ és $r > 0$, akkor az $(x_0 - r, x_0 + r)$ nyílt intervallumot az x_0 pont r sugarú környezetének nevezzük.

Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ and $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) Az x_0 **belső pontja** az A-nak, ha van olyan $r > 0$ szám, melyre $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$, azaz az x_0 pontnak van olyan környezete, amely része az A halmaznak.

(2) Az x_0 **határpontja** az A-nak, ha minden $r > 0$ szám esetén $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A \neq \emptyset$ és $(x_0 - r, x_0 + r) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$, azaz x_0-nak bármely környezete tartalmaz A-beli és A-n kívüli elemet is.

(3) Az x_0 **torlódási pontja** az A-nak, ha minden $r > 0$ szám esetén $((x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)) \cap A \neq \emptyset$.
Ez azt jelenti, hogy x_0-nak bármely környezete tartalmaz x_0-tól különböző A-beli elemet. Vagy: x_0-nak minden környezete végtelen sok A-beli elemet tartalmaz.

(4) Az x_0 **izolált pontja** az A-nak, ha nem torlódási pontja A-nak, azaz van olyan $r > 0$ szám, amelyre $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A = \{x_0\}$.
Ez azt jelenti, hogy az x_0-nak van olyan környezete, ami nem tartalmaz az x_0-n kívül más A-beli elemet.

Megjegyzés. Ha x_0 belső pontja A-nak, akkor x_0 torlódási pontja A-nak.

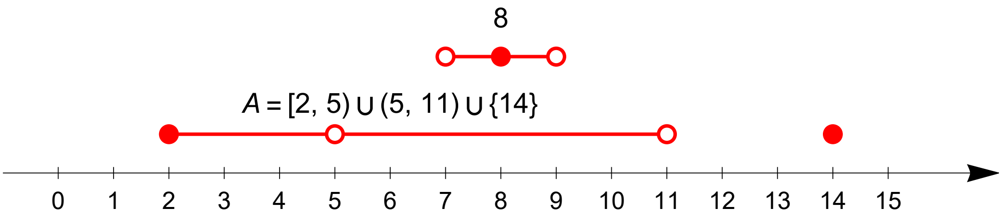
Példa

Legyen $A = [2, 5) \cup (5, 11) \cup \{14\}$. Határozzuk meg az A

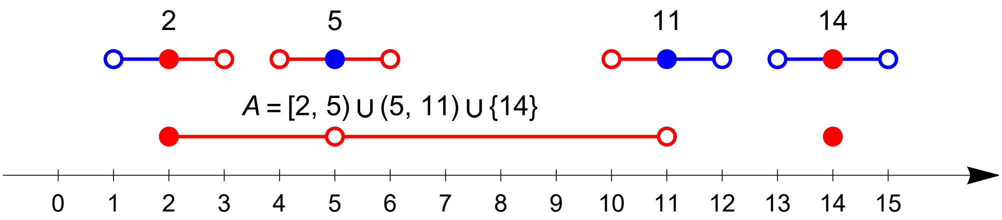
a) belső pontjainak,
b) határpontjainak,
c) torlódási pontjainak,
d) izolált pontjainak halmazát.

Megoldás.

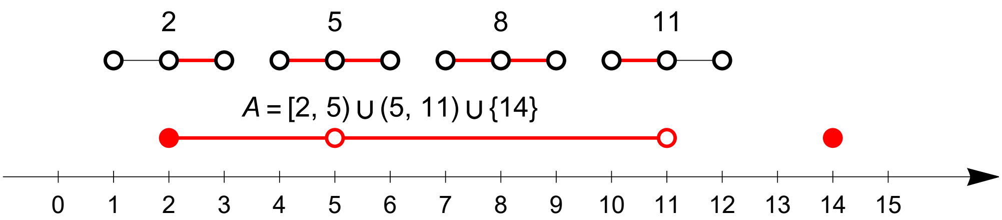
a) A belső pontok halmaza: $(2, 5) \cup (5, 11)$, mivel ezeknek a pontoknak van olyan környezete, amely része az A-nak. Például a 8 belső pontja az A-nak.



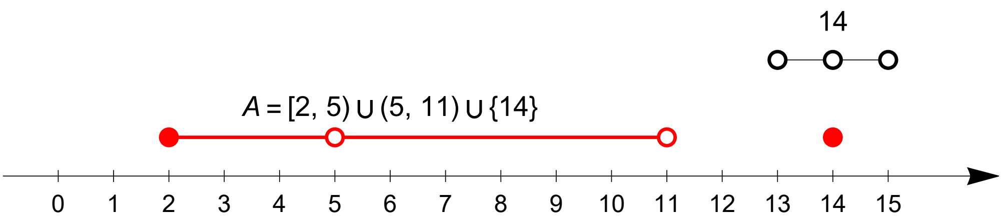
b) A határpontok halmaza: {2, 5, 11, 14}, mivel ezeknek a pontoknak bármely környezete tartalmaz *A*-beli és *A*-n kívüli elemet is.



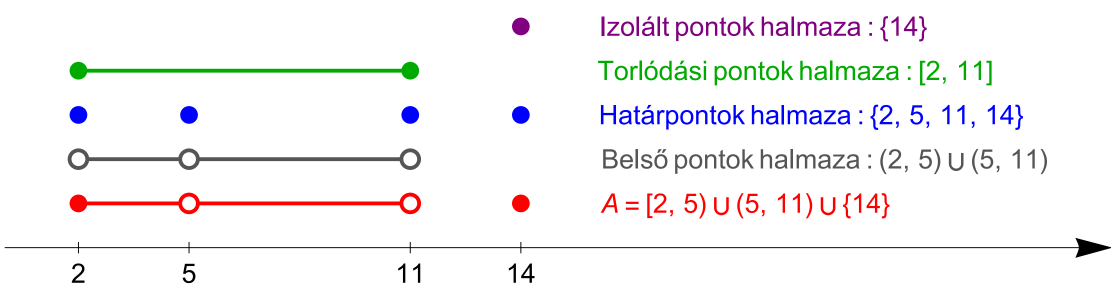
c) A torlódási pontok halmaza a [2, 11] zárt intervallum, mivel ha $x \in [2, 11]$, akkor bármely $(x - r, x + r)$ intervallum tartalmaz *x*-től különböző *A*-beli elemet. (Vagy: ezeknek a pontoknak bármely környezete végtelen sok *A*-beli elemet tartalmaz.) Például a 2, 5, 8, 11 torlódási pontja az *A*-nak.



A 14 nem torlódási pontja, hanem izolált pontja *A*-nak, mivel van olyan környezete, amely nem tartalmaz a 14-en kívül *A*-beli elemet.



Összefoglalva:



A kibővített valós számok halmaza

Definíció. Az $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ halmazt kibővített valós számok halmazának hívjuk.
Feltesszük, hogy minden $x \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén $-\infty \leq x \leq \infty$.
Az $\mathbb{R}$-beli műveletek részben kiterjeszthetők $\overline{\mathbb{R}}$-ra:

(1) $a + \infty = +\infty + a = \infty$, $\quad a \neq -\infty$

(2) $a - \infty = -\infty + a = -\infty$, $\quad a \neq +\infty$

(3) $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot a = \pm\infty$, $\quad a \in (0, +\infty]$

(4) $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot a = \mp\infty$, $\quad a \in [-\infty, 0)$

(5) $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0$, $\quad a \in \mathbb{R}$

(6) $\dfrac{\pm\infty}{a} = \pm\infty$, $\quad a \in (0, +\infty)$

(7) $\dfrac{\pm\infty}{a} = \mp\infty$, $\quad a \in (-\infty, 0)$

Definíció. • A ∞ egy környezetének hívunk egy (K, ∞) intervallumot, ha $K \in \mathbb{R}$.
• A $-\infty$ egy környezetének hívunk egy $(-\infty, K)$ intervallumot, ha $K \in \mathbb{R}$.

Megjegyzés. A **torlódási pont** fogalma a következőképpen terjeszthető ki $\overline{\mathbb{R}}$-ra.
Legyen $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ és $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor x torlódási pontja A-nak, ha x-nek bármely környezete tartalmaz x-től különböző A-beli elemet.

	Torlódási pontok halmaza $\overline{\mathbb{R}}$-ban
$\mathbb{N}$	$\{\infty\}$
$\mathbb{Z}$	$\{-\infty, \infty\}$
$\mathbb{Q}$	$\overline{\mathbb{R}}$
$\mathbb{R}$	$\overline{\mathbb{R}}$

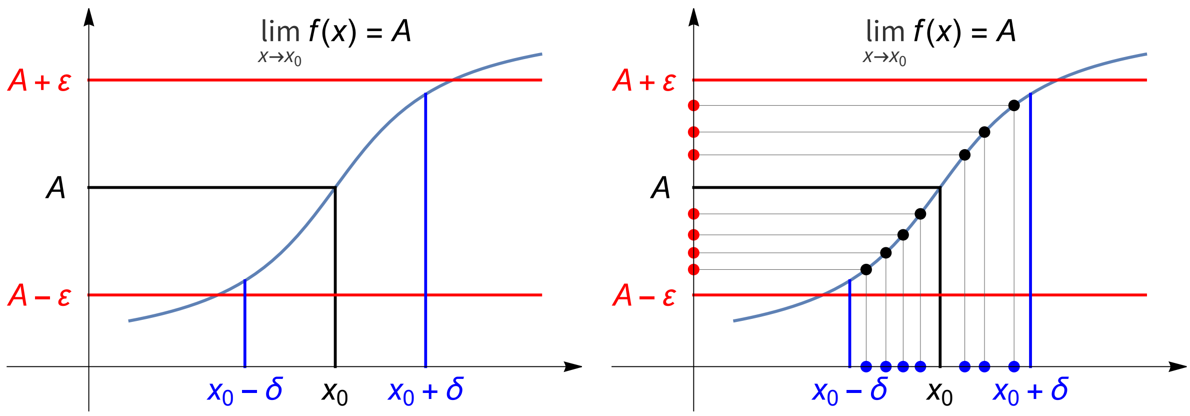
Véges helyen vett határértékek

Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban létezik határértéke, és az az $A \in \mathbb{R}$ valós szám, ha
• x_0 torlódási pontja D_f-nek,
• minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$\text{ha } x \in D_f \text{ és } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ akkor } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Megjegyzés: • $0 < |x - x_0| < \delta$ jelentése: $x_0 - \delta < x < x_0$ vagy $x_0 < x < x_0 + \delta$.
• δ függhet ε-tól, ezt néha $\delta(\varepsilon)$-nal jelöljük.



Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban létezik $\begin{cases} \text{jobb oldali} \\ \text{bal oldali} \end{cases}$ határértéke, és az az $A \in \mathbb{R}$ valós szám, ha

- x_0 torlódási pontja a $\begin{cases} D_f \cap (x_0, \infty) \\ D_f \cap (-\infty, x_0) \end{cases}$ halmaznak,
- minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$\text{ha } x \in D_f \text{ és } \begin{cases} x_0 < x < x_0 + \delta \\ x_0 - \delta < x < x_0 \end{cases}, \text{ akkor } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Jelölés: Az f $\begin{cases} \text{jobb oldali} \\ \text{bal oldali} \end{cases}$ határértéke x_0-ban $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) \end{cases}$

Következmény: Ha x_0 belső pontja D_f-nek, akkor $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ pontosan akkor létezik, ha

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \text{ és } \lim_{x \to x_0+0} f(x) \text{ is létezik, és } \lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x).$$

Feladat

1. A definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} + 3x - 1 \right) = 9.$

Megoldás. Be kell látnunk, hogy ha x “közel” van x_0-hoz, azaz $|x - x_0|$ “kicsi”, akkor $f(x)$ “közel” van A-hoz, azaz $|f(x) - A|$ is “kicsi”. Azaz meg kell mutatnunk, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$|f(x) - A| = \left| \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} + 3x - 1 \right) - 9 \right| = \left| \left(\frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} + 3x - 1 \right) - 9 \right| =$$

$$= |x + 2 + 3x - 1 - 9| = |4x - 8| = |4(x - 2)| = 4|x - 2| < \varepsilon, \text{ha } |x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$\Longrightarrow$ $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$ választással teljesül a definíció. Megjegyzés: $2 \notin D_f$.

Például $\varepsilon = 10^{-2}$ esetén $\delta = 2.5 \cdot 10^{-3}$.

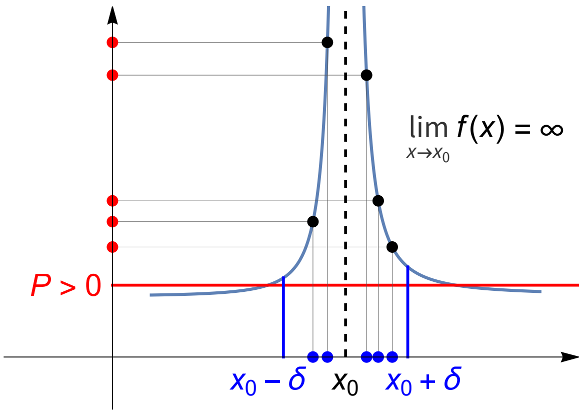
Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$, ha

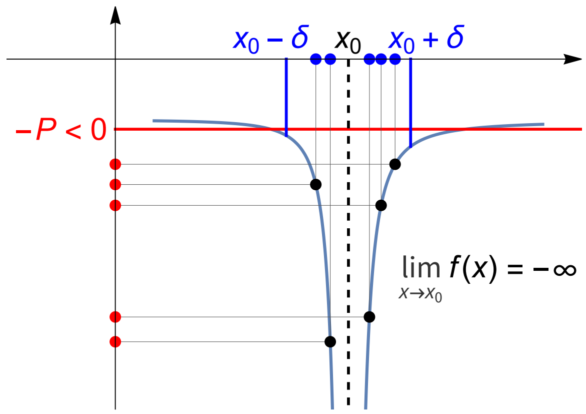
- x_0 torlódási pontja D_f-nek,
- minden $P > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$\text{ha } x \in D_f \text{ és } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ akkor } \begin{cases} f(x) > P \\ f(x) < -P \end{cases}.$$

Jelölés: $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, illetve $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Megjegyzés: A jobb és bal oldali határértékek az előzőekhez hasonlóan definiálhatók.





Feladat

$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$, mivel ha $P > 0$, akkor $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} > P \iff 0 < |x - 3| < \frac{1}{\sqrt{P}}$

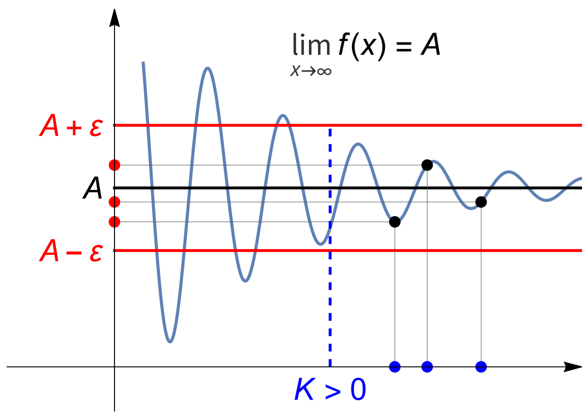
$\Longrightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt{P}}$ választással teljesül a definíció. Pl. $P = 10^6$ esetén $\delta = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$.

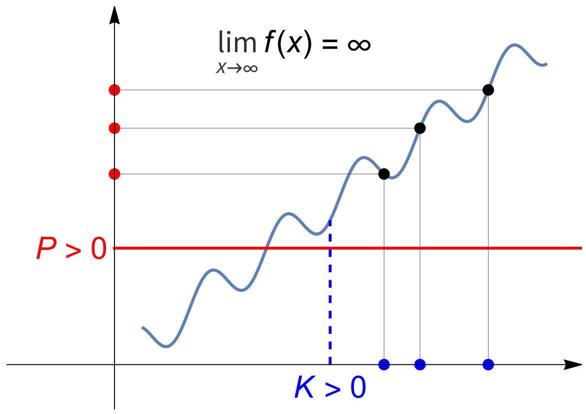
Végtelenben vett határértékek

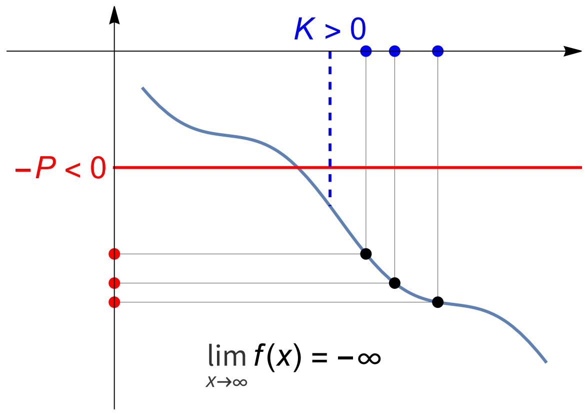
Definíció. Tegyük fel, hogy D_f felülről nem korlátos.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a ∞-ben az $A \in \mathbb{R}$ valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $K > 0$ szám, hogy $x > K$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
- Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a ∞-ben $\begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$, ha minden $P > 0$ számhoz található olyan $K > 0$ szám, hogy $x > K$ esetén $x \in D_f$ és $\begin{cases} f(x) > P \\ f(x) < -P \end{cases}$.

Megjegyzés. Ha f egy sorozat, azaz $D_f = \mathbb{N}^+$, akkor a ∞ az egyetlen torlódási pontja, így a határértéket csak itt lehet vizsgálni. Ekkor éppen a sorozatok határértékét kapjuk.







Definíció. Tegyük fel, hogy D_f alulról nem korlátos.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke $-\infty$-ben az $A \in \mathbb{R}$ valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $K > 0$ szám, hogy $x < -K$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke $-\infty$-ben $\begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$, ha minden $P > 0$ számhoz található olyan $K > 0$ szám, hogy $x < -K$ esetén $x \in D_f$ és $\begin{cases} f(x) > P \\ f(x) < -P \end{cases}$.

Megjegyzés

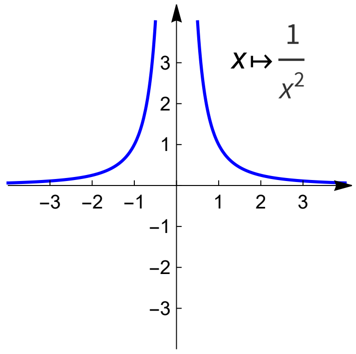
A határértékek definíciói a következőképpen foglalhatók össze.

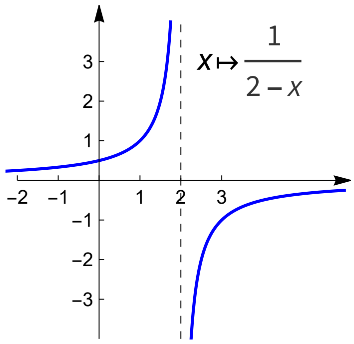
Tétel. Tegyük fel, hogy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja D_f-nek, és $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor $\lim_{x\to a} f(x) = b$ pontosan akkor, ha a b bármely J környezetéhez létezik az a-nak olyan I környezete, melyre

$$x \in I \cap D_f,\quad x \neq a \quad \text{esetén} \quad f(x) \in J.$$

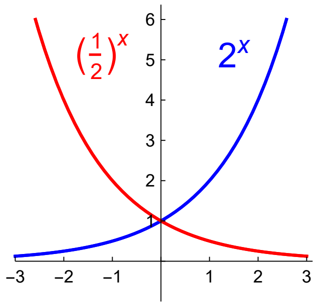
Példák

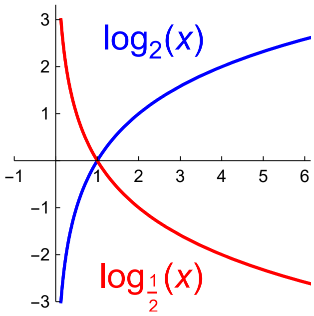
- $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x^2}=+\infty \implies \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$
- $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{1}{2-x}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 2+0}\frac{1}{2-x}=-\infty \implies \lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{2-x}$ nem létezik
- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2-x}=0$





- $\lim\limits_{x\to\infty}2^x=\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$
- $\lim\limits_{x\to 0+0}\log_2(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}\log_2(x)=\infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}2^{-x}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\lim\limits_{x\to-\infty}2^{-x}=\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0+0}\log_{\frac{1}{2}}(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{2}}(x)=-\infty$





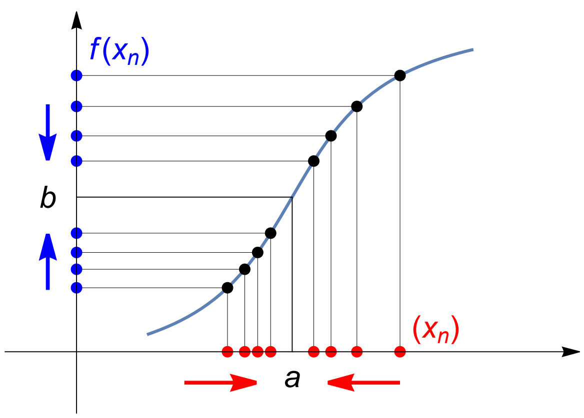
Átviteli elv

Tétel. Tegyük fel, hogy $a\in\overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja D_f-nek, és $b\in\overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor a következő két állítás ekvivalens:

1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$

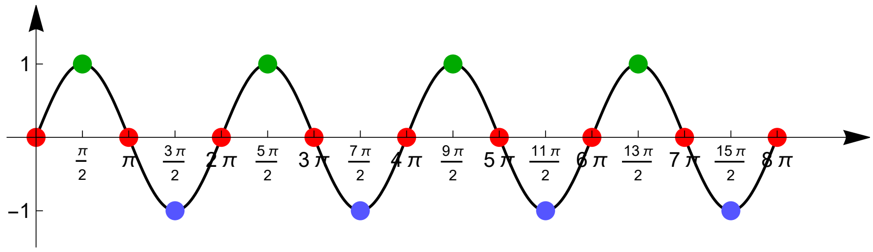
2) Minden, $D_f\setminus\{a\}$-beli, a-hoz konvergáló (x_n) sorozatra $f(x_n)\longrightarrow b$.



Megjegyzés. A tétel olyan feladatoknál használható jól, ahol azt igazoljuk, hogy nincs határérték.

Példák

1. Mutassuk meg, hogy a $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(x)$ határérték nem létezik.



Megoldás. Az átviteli elv segítségével ezt úgy igazolhatjuk, hogy megadunk különböző, végtelenbe tartó sorozatokat, amelyek mentén a megfelelő függvényértékek sorozata különböző értékekhez tart. Például:

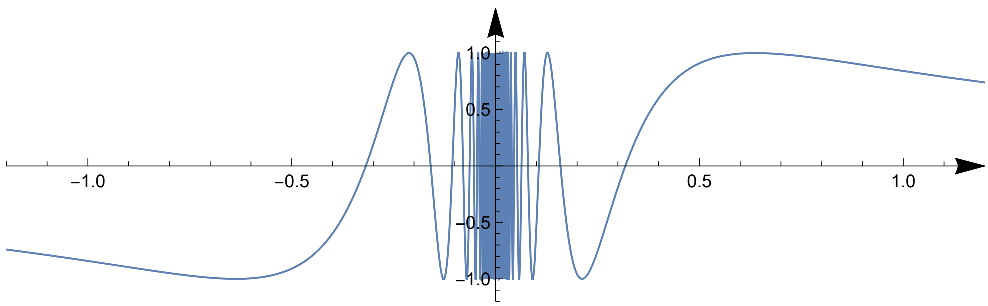
1) Ha $a_n = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\,\pi$, azaz $\frac{\pi}{2}, \frac{5\,\pi}{2}, \frac{9\,\pi}{2}, \frac{13\,\pi}{2}, \ldots$, akkor $a_n \longrightarrow \infty$ és $\sin(a_n) = 1 \longrightarrow 1$.

2) Ha $b_n = n\cdot\pi$, azaz $0, \pi, 2\,\pi, 3\,\pi, \ldots$, akkor $b_n \longrightarrow \infty$ és $\sin(b_n) = 0 \longrightarrow 0$.

3) Ha $c_n = \frac{3\,\pi}{2} + n\cdot 2\,\pi$, azaz $\frac{3\,\pi}{2}, \frac{7\,\pi}{2}, \frac{11\,\pi}{2}, \frac{15\,\pi}{2}, \ldots$, akkor $c_n \longrightarrow \infty$ és $\sin(c_n) = -1 \longrightarrow -1$.

(Két ilyen sorozat megadása elég.) Így az átviteli alapján a $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(x)$ határérték nem létezik.

2. Legyen $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Mutassuk meg, hogy f-nek nincs határértéke a 0-ban, még féloldali sem.



Megoldás. Megadunk két 0-ba tartó sorozatot úgy, hogy a határértékek sorozata különböző értékekhez tart.

1) Ha $x_n = \frac{1}{n\,\pi}$, akkor $x_n \longrightarrow 0+$ és $f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin(n\,\pi) = 0 \longrightarrow 0$.

2) Ha $y_n = \frac{2}{\pi + 4\,n\,\pi}$, akkor $y_n \longrightarrow 0+$ és $f(y_n) = \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\,n\,\pi\right) = 1 \longrightarrow 1 \neq 0$.

Így az átviteli elv miatt nem létezik jobb oldali határérték, és így határérték sem.

Határérték és műveletek

Tétel. Legyen $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja $D_f \cap D_g$-nek és $\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor

1. $\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot A$,
2. $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,
3. $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$.
4. Ha $B \neq 0$, akkor $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.
5. Ha $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ és $g(x)$ korlátos az a valamely környezetében, akkor $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = 0$.

Megjegyzés. Az 1-4. állítások akkor is igazak, ha $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ és a megfelelő művelet definiálva van $\overline{\mathbb{R}}$-on.

Rendőrelv függvényhatárértékre

Tétel. Tegyük fel, hogy

(1) $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja $D_f \cap D_g \cap D_h$-nek,

(2) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ minden x-re az x_0 egy környezetében

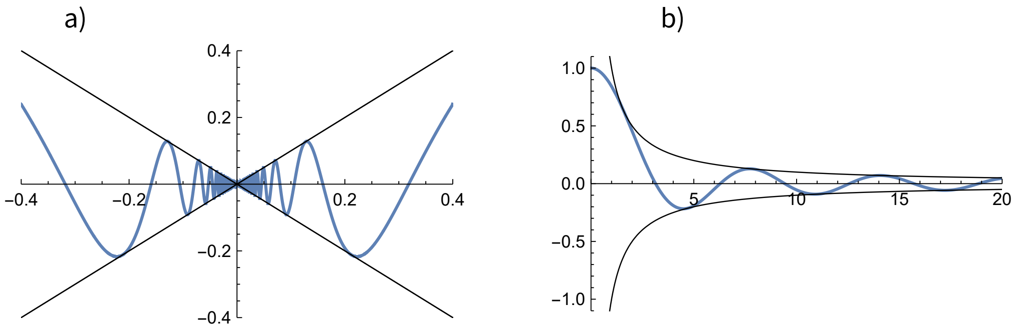
(3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$.

Megjegyzés. A tétel egyoldali határértékre is kimondható, illetve ha $b = \pm\infty$, akkor elég az egyik becslés.

Példa

Igazoljuk, hogy a) $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ és b) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sin(x) = 0$.



a) $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, mivel $-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$, és $\lim_{x \to 0} (|x|) = \lim_{x \to 0} (-|x|) = 0$

Vagy: mivel $x \longrightarrow 0$ és $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ korlátos, ezért a szorzat szintén 0-hoz tart.

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$, mivel $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$, ha $x > 0$, és $\lim_{x \to \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Vagy: mivel $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \to \infty} 0$ és $\sin(x)$ korlátos, ezért a szorzat szintén 0-hoz tart.

Feladatok

Polinomok határértéke $+\infty$-ben, $-\infty$-ben

Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^4-2x+1\right)$ 2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-3x^4-2x+1\right)$

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^3-2x+1\right)$ 4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-5x^3-2x+1\right)$

Megoldás. Emeljük ki a legnagyobb kitevős tagot.

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^4-2x+1\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^4\left(1-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)=\infty(1-0+0)=\infty$

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-3x^4-2x+1\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^4\left(-3-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)=\infty(-3-0+0)=-\infty$

3. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-2x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=\infty(1-0+0)=\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-\infty(1-0+0)=-\infty$

4. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-5x^3-2x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(-5-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=\infty(-5-0+0)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-5x^3-2x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-5-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-\infty(-5-0+0)=\infty$

Megjegyzés. Legyen $p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$ egy n-edfokú polinom.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}p(x)=\begin{cases}+\infty, & \text{ha } a_n>0\\ -\infty, & \text{ha } a_n<0\end{cases}$

2) Ha n páros, akkor $\lim\limits_{x\to-\infty}p(x)=\begin{cases}+\infty, & \text{ha } a_n>0\\ -\infty, & \text{ha } a_n<0\end{cases}$

3) Ha n páratlan, akkor $\lim\limits_{x\to-\infty}p(x)=\begin{cases}-\infty, & \text{ha } a_n>0\\ +\infty, & \text{ha } a_n<0\end{cases}$

Racionális törtfüggvények határértéke $+\infty$-ben, $-\infty$-ben

Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{7x^2-3x+5}{x^5-8x^2+1}$ 2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^5-x+3}{x^5+4x+1}$ 3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4x^3-x+3}{x^2+2x+1}$

Megoldás. Emeljük ki a számlálóból és a nevezőből is a legnagyobb kitevős tagokat.

1. Ha a számláló fokszáma kisebb, mint a nevezőé, akkor a határérték +∞-ben és −∞-ben is 0:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{7x^2-3x+5}{x^5-8x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^5}\cdot\frac{7-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{8}{x^3}+\frac{1}{x^5}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^3}\cdot\frac{7-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{8}{x^3}+\frac{1}{x^5}}=0\cdot\frac{7-0+0}{1-0+0}=0$$

2. Ha a számláló és a nevező fokszáma megegyezik, akkor a határérték +∞-ben és −∞-ben is a főegyütthatók hányadosa:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^5-x+3}{x^5+4x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^5}{x^5}\cdot\frac{2-\frac{1}{x^4}+\frac{3}{x^5}}{1+\frac{4}{x^4}+\frac{1}{x^5}}=\frac{2-0+0}{1+0+0}=2$$

3. Ha a számláló fokszáma nagyobb, mint a nevezőé, akkor a határérték +∞-ben $\begin{cases}+\infty\\-\infty\end{cases}$, ha a főegyütthatók hányadosa $\begin{cases}\text{pozitív}\\\text{negatív}\end{cases}$.

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-x+3}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}\cdot\frac{4-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{4-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\infty\cdot\frac{4-0+0}{1+0+0}=\infty$$

Hasonlóan, pl. $\lim_{x\to\infty}\frac{-4x^3-x+3}{x^2+2x+1}=-\infty$.

A −∞-beli határérték a főegyütthatók előjelétől és a fokszámok paritásától függően +∞ vagy −∞.

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-x+3}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}\cdot\frac{4-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}x\cdot\frac{4-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=(-\infty)\cdot\frac{4-0+0}{1+0+0}=-\infty$$

Hasonlóan, pl. $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^6-x+3}{x^2+2x+1}=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x^3-x+3}{x^2+2x+1}=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x^6-x+3}{x^2+2x+1}=-\infty$.

További feladatok

Számítsuk ki az alábbi határértékeket

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+\sin(x)}{2e^x+x}$ 2. $\lim_{x\to\infty}\frac{2^{2x}+3^{x+1}}{4^{x+1}+2^{x+2}}$ 3. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3e^{2x}+e^{-x}}{e^{2x}-2e^{-3x}}$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{x^4-2x^3-5x^2}{6x^5+x^2}$ 5. $\lim_{x\to 0}\frac{x^6-8x^5+x^3}{x^7-2x}$

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+\sin(x)}{2\,e^x+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{e^x}\cdot\dfrac{1+\dfrac{\sin(x)}{e^x}}{2+\dfrac{x}{e^x}}=\dfrac{1+0}{2+0}=\dfrac{1}{2}$

Felhasználjuk:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{e}\right)^x\cdot\sin(x)=0$, mivel $\dfrac{\text{korlátos}}{\infty}$ vagy $0\cdot\infty$ alakú.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$, ld. a nagyságrendek összehasonlítását a sorozatoknál.

Hasonlóan: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3\,x+4}{e^x}=0,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\text{polinom}}{a^x}=0$, ha $a>1$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{2\,x}+3^{x+1}}{4^{x+1}+2^{x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4^x+3\cdot 3^x}{4\cdot 4^x+4\cdot 2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4^x}{4^x}\,\dfrac{1+3\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^x}{4+4\cdot\left(\dfrac{2}{4}\right)^x}=\dfrac{1+0}{4+0}=\dfrac{1}{4}$

3. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\,e^{2\,x}+e^{-x}}{e^{2\,x}-2\,e^{-3\,x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2\,x}}{e^{2\,x}}\cdot\dfrac{3+\dfrac{e^{-x}}{e^{2\,x}}}{1-2\cdot\dfrac{e^{-3\,x}}{e^{2\,x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+e^{-3\,x}}{1-2\cdot e^{-5\,x}}=\dfrac{3+0}{1-0}=3$

b) A $-\infty$-beli határérték kiszámításához helyettesítsünk $x=-y$-t, ekkor $x\longrightarrow-\infty$ esetén $y\longrightarrow+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3\,e^{2\,x}+e^{-x}}{e^{2\,x}-2\,e^{-3\,x}}=\lim_{y\to\infty}\frac{3\,e^{-2\,y}+e^{y}}{e^{-2\,y}-2\,e^{3\,y}}=\lim_{y\to\infty}\frac{e^{y}}{e^{3\,y}}\,\frac{3\cdot\dfrac{e^{-2\,y}}{e^{y}}+1}{\dfrac{e^{-2\,y}}{e^{3\,y}}-2}=\lim_{y\to\infty}e^{-2\,y}\,\frac{3\cdot e^{-3\,y}+1}{e^{-5\,y}-2}=0\cdot\frac{3\cdot 0+1}{0-2}=0$$

A következő határértékek $\dfrac{0}{0}$ alakúak, itt emeljük ki a legkisebb kitevős tagokat:

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4-2\,x^3-5\,x^2}{6\,x^5+x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2}\cdot\dfrac{x^2-2\,x-5}{6\,x^3+1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-2\,x-5}{6\,x^3+1}=\dfrac{0-0-5}{0+1}=-5$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^6-8\,x^5+x^3}{x^7-2\,x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{x}\cdot\dfrac{x^3-8\,x^2+1}{x^6-2}=\lim\limits_{x\to0}x^2\cdot\dfrac{x^3-8\,x^2+1}{x^6-2}=0\cdot\dfrac{0-0+1}{0-2}=0$