Matematika MC, 5. előadás

Számsorozatok

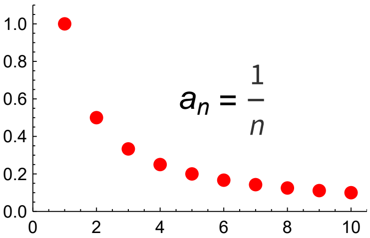
A sorozat fogalma

Definíció: A természetes számok halmazán értelmezett $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$ valós értékű függvényt (valós) számsorozatnak nevezzük, az n helyett felvett értéke $f(n)=a_n$, $n=1, 2, 3, \ldots$.
A számsorozat jelölése: (a_n) vagy a_n, $n=1, 2, \ldots$

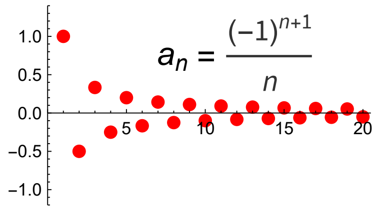
Megjegyzés: Az indexelést 0-val is kezdhetjük, továbbá az $f:\{k, k+1, k+2, \ldots\}\longrightarrow\mathbb{R}$ függvény is sorozat, ahol $k\in\mathbb{N}$.

Példák

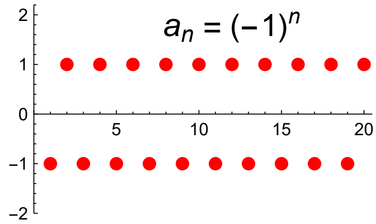
1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$



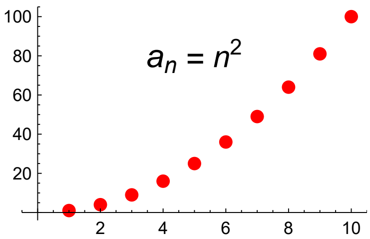
2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$



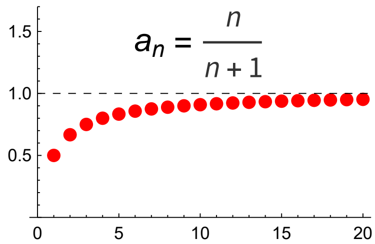
3) $1, -1, 1, -1, \ldots$



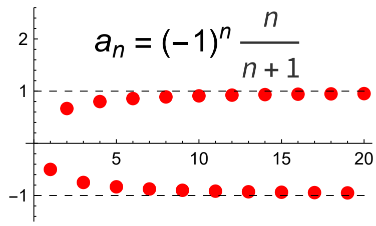
4) $1, 4, 9, 16, \ldots$



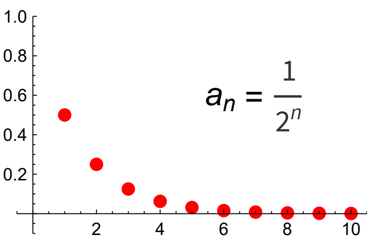
5) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$



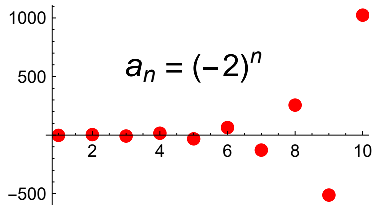
6) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$



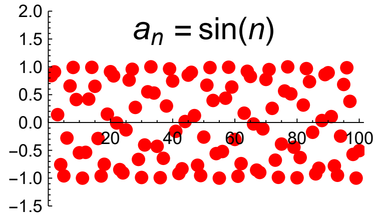
7) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$



8) $-2, 4, -8, 16, \ldots$



9) $\sin(1), \sin(2), \sin(3), \ldots$



Monotonitás

Definíció:

Az (a_n) sorozat $\begin{cases} \text{monoton növő,} \\ \text{szigorúan monoton növő,} \\ \text{monoton csökkenő,} \\ \text{szigorúan monoton csökkenő,} \end{cases}$ ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\begin{cases} a_n \leq a_{n+1} \\ a_n < a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n+1} \\ a_n > a_{n+1} \end{cases}$.

Példák: Szigorúan monoton csökkenő: **1)** $a_n = \frac{1}{n}$, **7)** $a_n = \frac{1}{2^n}$

Szigorúan monoton növekvő: **4)** $a_n = n^2$, **5)** $a_n = \frac{n}{n+1}$

A többi sorozat nem monoton.

Korlátosság

Definíció:

- Az (a_n) sorozat alulról korlátos, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A \leq a_n$.
- Az (a_n) sorozat felülről korlátos, ha van olyan $B \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq B$.
- Az (a_n) sorozat korlátos, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ és $B \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A \leq a_n \leq B$.

Példák: Korlátos sorozatok: **1)** $a_n = \frac{1}{n}$, **2)** $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, **3)** $a_n(-1)^n$, **5)** $a_n = \frac{n}{n+1}$,

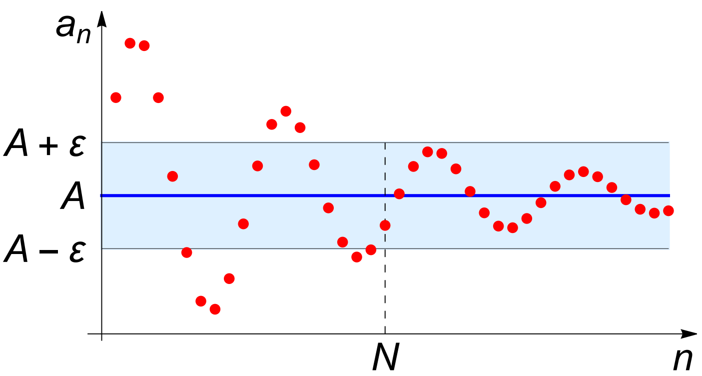
6) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$, **7)** $a_n = \frac{1}{2^n}$, **9)** $a_n = \sin(n)$

Számsorozat konvergenciája

Definíció: Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat konvergens és határértéke (limesze) $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy minden $n > N(\varepsilon)$ esetén teljesül az $|\, a_n - A \,| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

$N(\varepsilon)$ neve: küszöbindex, küszöbszám

Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ vagy $a_n \xrightarrow{n\to\infty} A$ (a_n tart A-hoz, vagy a_n konvergál A-hoz)



Példák: Konvergens sorozatok: **1)** $a_n = \frac{1}{n}$, **2)** $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, **5)** $a_n = \frac{n}{n+1}$, **7)** $a_n = \frac{1}{2^n}$

Megjegyzés: A definícióval ekvivalens: minden $\varepsilon > 0$-ra az $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ intervallumon kívül a sorozatnak véges sok eleme van. (Az intervallumon belül pedig végtelen sok eleme van.)

Feladat: Igazoljuk a definíció alapján, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Megoldás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Belátjuk, hogy van olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N(\varepsilon)$ esetén teljesül az $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$, mivel n pozitív ($n \geq 1$), így

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Ha az $N(\varepsilon)$ küszöbszámot $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$-nek választjuk, vagy annál nagyobb számnak $\left(N(\varepsilon) \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)$, akkor teljesül a definíció tehát $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Például $\varepsilon = 0.001 = \frac{1}{1000}$ esetén az $N = 1000$ (vagy $N = 1500$, $N = 2000$ stb.) választás megfelelő.

Számsorozat divergenciája

Definíció: A nem konvergens számsorozatokat **divergens** számsorozatnak nevezzük.

Példa: Az $a_n = (-1)^n$ sorozat divergens.

Bizonyítás. Határértékként csak az 1 és -1 jöhetne szóba. $A = 1$ nem lehet határérték, mert pl. $\varepsilon = 1$ választással az $(A - \varepsilon, A + \varepsilon) = (0, 2)$ intervallumon kívül a sorozatnak végtelen sok eleme van, a páratlan indexű $a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$ elemek, így ehhez az ε-hoz nem található alkalmas küszöbindex.

A divergens sorozatoknak két fontos speciális esete a $+\infty$-hez és a $-\infty$-hez divergáló számsorozat.

Definíció: Az (a_n) sorozat a **végtelenhez tart** (vagy **minden határon túl növő**), ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz található olyan $N(K) \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy minden $n > N(\varepsilon)$ esetén teljesül az $a_n > K$ egyenlőtlenség. Jelölés: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Definíció: Az (a_n) sorozat a **mínusz végtelenhez tart** (vagy **minden határon túl csökkenő**), ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz található olyan $N(K) \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy minden $n > N(\varepsilon)$ esetén teljesül az $a_n < K$ egyenlőtlenség. Jelölés: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Konvergencia és korlátosság

Tétel: Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor korlátos.

Bizonyítás. • Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ és $\varepsilon = 1$.
- Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén $A - 1 < a_n < A + 1$, tehát az $(A - 1, A + 1)$ intervallumon kívül csak véges sok elem van: $a_1, a_2, \ldots, a_N$.
- Véges sok szám között van legkisebb és legnagyobb, legyen $m = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_N, A - 1\}$ és $M = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_N, A + 1\}$.
- Ekkor nyilván minden n-re $m \leq a_n \leq M$.

Megjegyzés: Az állítás megfordítása nem igaz, pl. $a_n = (-1)^n$ korlátos, de nem konvergens.

Részsorozat

Definíció. Legyen $(n_k) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ egy természetes számokból álló szigorúan monoton növő sorozat. Ekkor azt mondjuk, hogy az (a_{n_k}) sorozat **részsorozata** az (a_n) sorozatnak.

Példák: a) A prímszámok részsorozata a pozitív egész számoknak.

b) Legyen $a_n = \frac{1}{n}$ és $b_n = a_{2n} = \frac{1}{2n}$. Ekkor (b_n) részsorozata (a_n)-nek.

c) Legyen $a_n = \frac{1}{1+n}$ és $b_n = a_{n^2} = \frac{1}{1+n^2}$. Ekkor (b_n) részsorozata (a_n)-nek.

d) Legyen $a_n = (-1)^n$, $b_n = a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ és $c_n = a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$. Ekkor (b_n) és (c_n) részsorozata (a_n)-nek.

Megjegyzés. Egy sorozatból úgy készíthetünk részsorozatot, hogy bizonyot elemeket kitörlük, és a megmaradó elemek sorrendjét megtartjuk.
Például az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... sorozatnak részsorozata a 2, 4, 6, 8, ... sorozat, de a 4, 2, 8, 6, ... sorozat nem részsorozata.

Torlódási pont

Definíció:
- A $t \in \mathbb{R}$ számot a sorozat **torlódási pontjának** nevezzük, ha van a sorozatnak a t számhoz konvergáló részsorozata.
- A $+\infty$-t és $-\infty$-t is a sorozat torlódási pontjának tekintjük, ha van a sorozatnak minden határon túl növő illetve csökkenő részsorozata.

Példák

Sorozat	**Torlódási pontok**	**Határérték**	
1) $a_n = \frac{1}{n}$	$t = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	$\Longrightarrow (a_n)$ konvergens
2) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$t = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	$\Longrightarrow (a_n)$ konvergens
3) $a_n = (-1)^n$	$t_1 = -1,\ t_2 = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nem létezik	$\Longrightarrow (a_n)$ divergens
4) $a_n = n^2$	$t = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$	$\Longrightarrow (a_n)$ divergens
5) $a_n = \frac{n}{n+1}$	$t = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$	$\Longrightarrow (a_n)$ konvergens
6) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$	$t_1 = -1,\ t_2 = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nem létezik	$\Longrightarrow (a_n)$ divergens
7) $a_n = \frac{1}{2^n}$	$t = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	$\Longrightarrow (a_n)$ konvergens
8) $a_n = (-2)^n$	$t_1 = -\infty,\ t_2 = \infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nem létezik	$\Longrightarrow (a_n)$ divergens

Tételek

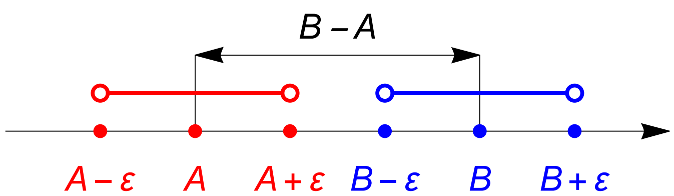
1. Minden határérték egyben torlódási pont is. (Következik a definíciókból.)

2. Ha egy $t \in \mathbb{R}$ szám torlódási pontja az (a_n) sorozatnak, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén a $(t - \varepsilon,\ t + \varepsilon)$ intervallumban (azaz a t szám ε sugarú környezetében) végtelen sok sorozatelem van.

3. Ha egy sorozat komvergens, akkor a határértéke egyértelmű.

Bizonyítás. • Indirekt módon tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatnak két különböző hatáértéke van, A és B, és legyen $A < B$.

• Legyen $\varepsilon = \frac{B - A}{3}$, ekkor az A és B szám ε sugarú nyílt környezete diszjunkt, azaz nem metszik egymást.



• Mivel $a_n \longrightarrow A$ és $a_n \longrightarrow B$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén a sorozat tagjai az $(A - \varepsilon,\ A + \varepsilon)$ és $(B - \varepsilon,\ B + \varepsilon)$ környezetbe is beletartoznak, ami lehetetlen, hiszen ezek az intervallumok diszjunktak.

• Ellentmondásra jutottunk, ezért az indirekt feltevés hamis, tehát az eredeti állítás igaz.

4. Ha egy korlátos sorozatnak egyetlen torlódási pontja van, akkor konvergens.

5. a) Ha egy sorozat monoton növő és felülről korlátos, akkor konvergens.
b) Ha egy sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens.
Összefoglalva: Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

6. Minden sorozatból kiválasztható monoton (növekvő vagy csökkenő) részsorozat.

Bolzano-Weierstrass-tétel: Korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás. A 6. tulajdonság miatt egy korlátos sorozatnak van monoton részsorozata. Nyilván ez a monoton részsorozat korlátos is, így az 5. tulajdonság miatt konvergens.

Cauchy-féle konvergenciakritérium:
Az (a_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van van olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy minden $n, k > N(\varepsilon)$ esetén teljesül az $|a_n - a_k| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Megjegyzés. A tétel azt a tényt fejezi ki, hogy konvergens sorozat elemei egymáshoz is tetszőlegesen közel vannak, ha indexeik elég nagyok. Ezt a tételt használhatjuk a konvergencia bizonyítására akkor is, ha a határértéket nem ismerjük.

Határérték és műveletek

Tétel (Számszoros, összeg, különbség, szorzat, hányados hatérértéke):
Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$, akkor

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot A$ (ahol $c \in \mathbb{R}$)

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A + B$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A - B$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$

5) ha $B \neq 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$

Példák: **1)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{n^2} + \frac{5}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 5 \cdot \frac{1}{n}\right) = 3 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 10n}{3n^2 + 7} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{2 - \frac{10}{n}}{3 + \frac{7}{n^2}} = \frac{2-0}{3+0} = \frac{2}{3}$

Megjegyzés: További hasonló tételek bizonyíthatók, pl.

a) $\infty + \infty \longrightarrow \infty$ (Jelentése: ha $a_n \longrightarrow \infty$ és $b_n \longrightarrow \infty$, akkor $a_n + b_n \longrightarrow \infty$)

b) $\infty \cdot \infty \longrightarrow \infty$

c) $c \cdot \infty \longrightarrow \begin{cases} \infty, & \text{ha } c > 0 \\ -\infty, & \text{ha } c < 0 \end{cases}$

c) $\dfrac{c}{\infty} \longrightarrow 0$ (ahol $c \in \mathbb{R}$), $\dfrac{\text{korlátos}}{\infty} \longrightarrow 0$

Példák: **1)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2 + 2^n\right) = \infty + \infty = \infty$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2 \cdot 2^n\right) = \infty \cdot \infty = \infty$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3\,n^2 + 5\,n\right) = \infty + \infty = \infty$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{2^n} = 0$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = \dfrac{\text{korlátos}}{\infty} = 0$

Határozatlan alakok: $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, 1^∞, ∞^0, 0^0

Ilyen esetekben azonos átalakítással próbálkozunk.

Példák: 1) $\dfrac{\infty}{\infty}$ alakú: $\quad \dfrac{n^2}{n} = n \longrightarrow \infty$, $\quad \dfrac{2\,n}{n} = 2 \longrightarrow 2$, $\quad \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$

2) $0 \cdot \infty$ alakú: $\quad \dfrac{1}{n} \cdot n^2 = n \longrightarrow \infty$, $\quad \dfrac{1}{n} \cdot 3\,n = 3 \longrightarrow 3$, $\quad \dfrac{1}{n^2} \cdot n = \dfrac{1}{n} \longrightarrow \infty$

3) $\infty - \infty$ alakú: $\quad n^2 - n = \longrightarrow \infty$, $\quad n - n = 0 \longrightarrow 0$, $\quad n - n^2 \longrightarrow -\infty$

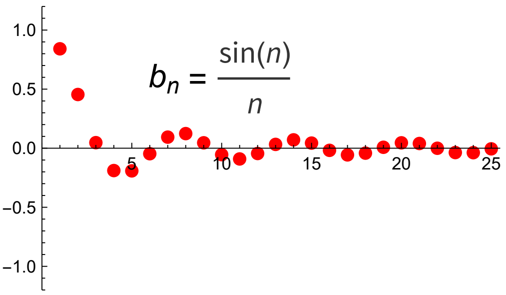
Rendőrelv

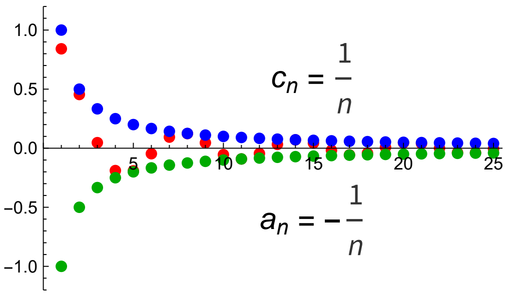
Tétel. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \le b_n \le c_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

Példa: Számítsuk ki az $a_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$ sorozat határértékét.

Megoldás. Minden n-re $-1 \le \sin(n) \le 1 \implies -\dfrac{1}{n} \le \dfrac{\sin(n)}{n} \le \dfrac{1}{n}$.

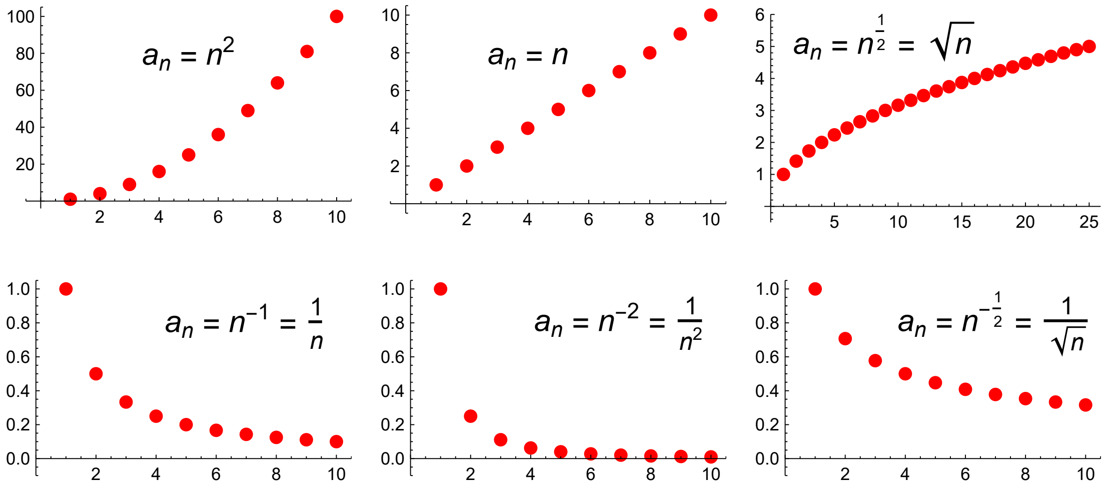
Tudjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$, így a rendőrelv miatt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n)}{n} = 0$



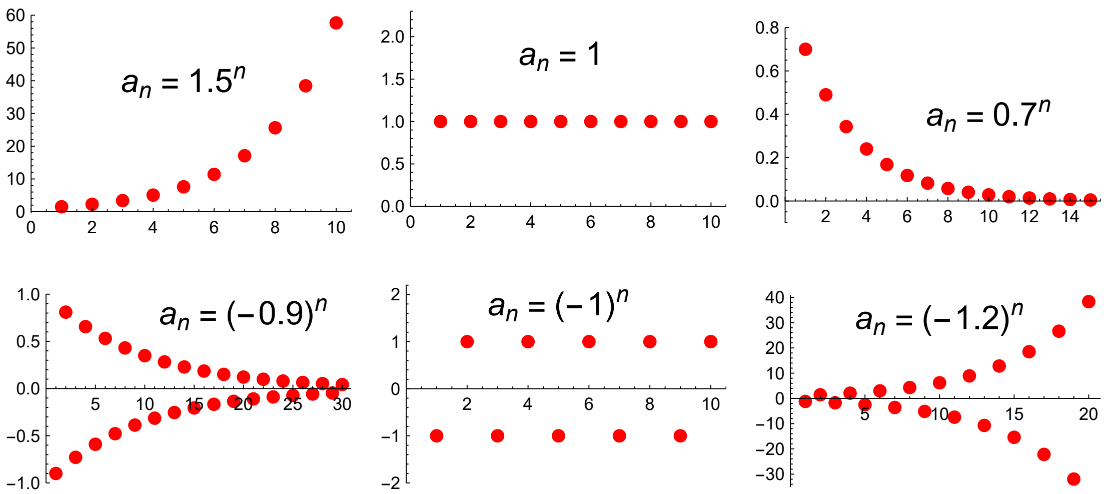


Néhány nevezetes sorozat határértéke

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} \infty, & \text{ha } \alpha > 0 \\ 1, & \text{ha } \alpha = 0 \\ 0, & \text{ha } \alpha < 0 \end{cases}$

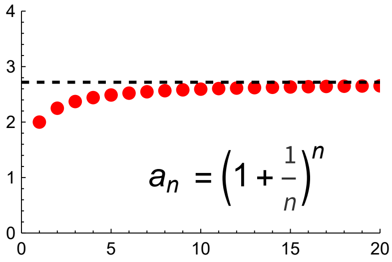


2) Mértani sorozat határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{n} = \begin{cases} \infty, & \text{ha } a > 1 \\ 1, & \text{ha } a = 1 \\ 0, & \text{ha } |a| < 1 \\ \text{nem létezik}, & \text{ha } a \leq -1 \end{cases}$



3) Belátható, hogy az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monoton növő és felülről korlátos,

így konvergens. A sorozat határértékét e-vel jelöljük: $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.



A sorozat néhány tagja: $a_1 = 2,\ a_2 = 2.25,\ a_3 \approx 2.37,\ a_4 \approx 2.44,\ a_5 \approx 2.488$

$a_{10} \approx 2.59,\ a_{20} \approx 2.65,\ a_{100} \approx 2.70481,\ a_{200} \approx 2.71152$

$a_{1000} \approx 2.71692,\ a_{10\,000} \approx 2.71815$

Megjegyzés: 1) Az $e \approx 2.718281828459\ldots$ szám irracionális.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,\ x \in \mathbb{R}$

3) $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$

Ebben az esetben a konvergencia nagyon gyors, pl.

$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2.718056\ldots$ (3 jegy pontos)

$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} \approx 2.7182818011\ldots$ (7 jegy pontos)

Nagyságrendek összehasonlítása

Definíció. Tegyük fel, hogy $a_n \longrightarrow \infty$ és $b_n \longrightarrow \infty$. Azt mondjuk, hogy a (b_n) sorozat nagyobb nagyságrendű, vagy gyorsabban tart a végtelenbe, mint az (a_n) sorozat, ha $\frac{b_n}{a_n} \longrightarrow \infty$ (és ekkor $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 0$). Jelölés: $a_n << b_n$.

Tétel. $n^k << a^n << n! << n^n$, ahol $k \in \mathbb{N}^+$ és $a > 1$.

Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n n^k = 0$, ha $|a| < 1$ és $k \in \mathbb{N}$

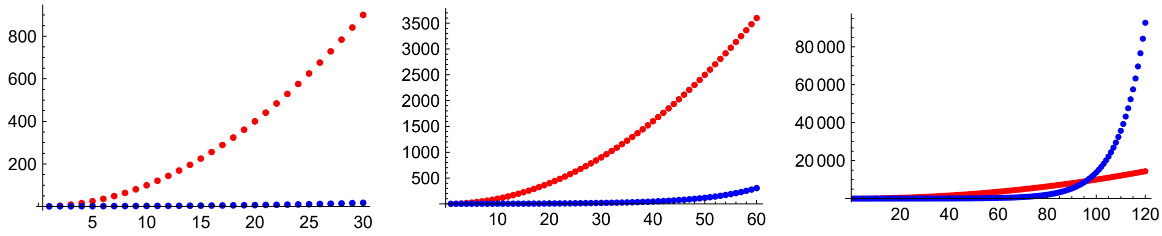
Példák: **1)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!} = \infty,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{3^n} = \infty,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{10^n} = \infty,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{n^3} = \infty$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{n^n} = 0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^n}{n!} = 0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{5^n} = 0$

3) $0\cdot\infty$ alakú határértékek: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot n^{10} = 0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot n^{10} = 0,\quad \lim\limits_{n\to\infty} 0.8^n \cdot n^5 = 0$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{1.1^n} = 0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1.1^n}{n^2} = \infty.$

Az $a_n = n^2$ (piros) és $b_n = 1.1^n$ (kék) sorozat grafikonja:



Megjegyzés:

1) Ha az (a_n) sorozat $\begin{cases} \text{pozitív} \\ \text{negatív} \end{cases}$ értékeken keresztül tart a 0-ba ($\begin{cases} \text{jobbról} \\ \text{balról} \end{cases}$ tart a 0-ba),

akkor a reciproka $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$-be tart:

- $(a_n > 0 \text{ és } a_n \longrightarrow 0) \Longrightarrow \left(\frac{1}{a_n} \longrightarrow \infty\right)$
- $(a_n < 0 \text{ és } a_n \longrightarrow 0) \Longrightarrow \left(\frac{1}{a_n} \longrightarrow -\infty\right)$
- Jelölés: $\frac{1}{0+} \longrightarrow +\infty$, $\frac{1}{0-} \longrightarrow -\infty$

2) Ha az (a_n) sorozat 0-ba tart, akkor ebből még nem következik, hogy a reciproka ∞-be tart, pl.

$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, azaz $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ ...

$\frac{1}{a_n} = (-2)^n$, azaz $-2, 4, -8, 16, -32, 64, \ldots$ $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, de $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$ nem létezik.

Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét:

a) $a_n = \frac{n^3 - 4n + 2}{5n^3 + 8n^2}$ **b)** $a_n = \frac{n^2 + 7n - 10}{2n^4 + n^3 + 16}$ **c)** $a_n = \frac{2n^3 - n^2}{9n^2 + 100}$ **d)** $a_n = \frac{-4n^5 + 8}{2n^3 + 3n}$

Megoldás. Emeljük ki a számlálóból és a nevezőből is azt a tagot, ami a leggyorsabban tart a ∞-be, azaz az n legnagyobb kitevős hatványát.

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 4n + 2}{5n^3 + 8n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{1 - \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{5 + \frac{8}{n}} = \frac{1 - 0 + 0}{5 + 0} = \frac{1}{5}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 7n - 10}{2n^4 + n^3 + 16} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^4} \cdot \frac{1 + \frac{7}{n} - \frac{10}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{16}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1 + \frac{7}{n} - \frac{10}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{16}{n^4}} = 0 \cdot \frac{1 + 0 - 0}{2 + 0 + 0} = 0$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - n^2}{9n^2 + 100} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{n^2} \cdot \dfrac{2 - \dfrac{1}{n}}{9 + \dfrac{100}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \dfrac{2 - \dfrac{1}{n}}{9 + \dfrac{100}{n^2}} = \infty \cdot \dfrac{2-0}{9+0} = \infty \cdot \dfrac{2}{9} = \infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-4n^5 + 8}{2n^3 + 3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5}{n^3} \cdot \dfrac{-4 + \dfrac{8}{n^5}}{2 + \dfrac{3}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \dfrac{-4 + \dfrac{8}{n^5}}{2 + \dfrac{3}{n^2}} = \infty \cdot \dfrac{-4+0}{2+0} = \infty \cdot (-2) = -\infty$

Megjegyzés. Racionális törtfüggvény: $\dfrac{\text{polinom}}{\text{polinom}}$ alakú függvény.

Legyen $f(n) = \dfrac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_s n^s + b_{s-1} n^{s-1} + \ldots + b_s n + b_0}$ egy racionális törtfüggvényből képezett sorozat.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \dfrac{a_k}{b_s}$, ha $k = s$, azaz a határérték a főegyütthatók hányadosa, ha a számláló és a nevező fokszáma megegyezik.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$, ha $k < s$, azaz a határérték 0, ha a számláló fokszáma kisebb, mint a nevezőé.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } k > s \text{ és } a_k / b_s > 0 \\ -\infty, & \text{ha } k > s \text{ és } a_k / b_s > 0 \end{cases}$ azaz a határérték $\begin{cases} +\infty, \\ -\infty, \end{cases}$ ha a számláló fokszáma nagyobb, mint a nevezőé, és a főegyütthatók hányadosa $\begin{cases} \text{pozitív.} \\ \text{negatív.} \end{cases}$

2. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét:

a) $a_n = \dfrac{3^{2n}}{4^n + 3^{n+1}}$ **b)** $a_n = \dfrac{2^{2n} + 3^n}{4^{n+1} + 2^{n+3}}$ **c)** $a_n = \dfrac{2^n \cdot 3^n + (-3)^n}{5^{n+2} + 7^n}$

Megoldás. Emeljük ki azt az exponenciális tagot, aminek az alapja abszolút értékben a legnagyobb.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{2n}}{4^n + 3^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathbf{9^n}}{\mathbf{4^n} + 3 \cdot 3^n} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^n \cdot \dfrac{1}{1 + 3 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^n} = \infty \cdot \dfrac{1}{1+0} = \infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{2n} + 3^n}{4^{n+1} + 2^{n+3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathbf{4^n} + 3^n}{4 \cdot \mathbf{4^n} + 8 \cdot 2^n} = \left(\dfrac{4}{4}\right)^n \cdot \dfrac{1 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{4 + 8 \cdot \left(\dfrac{2}{4}\right)^n} = 1 \cdot \dfrac{1+0}{4+0} = \dfrac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n \cdot 3^n + (-3)^n}{5^{n+2} + 7^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathbf{6^n} + (-3)^n}{25 \cdot 5^n + \mathbf{7^n}} = \left(\dfrac{6}{7}\right)^n \cdot \dfrac{1 + \left(-\dfrac{3}{6}\right)^n}{25 \left(\dfrac{5}{7}\right)^n + 1} = 0 \cdot \dfrac{1+0}{0+1} = 0$