Matematika MC, 4. előadás

Függvények, 2. rész: összetett függvény, inverz függvény.
Trigonometrikus függvények és inverzeik. Trigonometrikus egyenletek.

Függvények, 2. rész

Összetett függvény

Definíció. Az f külső és g belső függvényből készített összetett függvénynek nevezzük az

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

függvényt, melynek értelmezési tartománya $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$,
azaz azon x-ek a g értelmezési tartományából, amelyekre $g(x)$ benne van az f értelmezési tartományában.

Megjegyzés: Az $f \circ g$ ("f kör g") függvénykompozíció vagy összetett függvény pontosan akkor létezik, hogy $R_g \cap D_f \neq \emptyset$.

Példák

1. Legyen $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ és $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = x + 2$.

Ekkor $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = \sqrt{x+2}$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [0, \infty)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \geq 0\} = [-2, \infty)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} + 2$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in [0, \infty) \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \left\{x \geq 0 \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\right\} = [0, \infty)$$

2. Legyen $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$ és $g : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \lg x$.

Ekkor $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\lg x) = \frac{1}{\lg x}$

$$D_{f \circ g} = \{x \in (0, \infty) \mid g(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \{x > 0 \mid \lg x \neq 0\} = \{x > 0 \mid x \neq 1\} = (0, 1) \cup (1, \infty)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \lg\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid f(x) \in (0, \infty)\} = \left\{x \neq 0 \mid \frac{1}{x} > 0\right\} = (0, \infty)$$

Az értelmezési tartomány meghatározása

Ha egy függvény csak formulával van megadva, akkor az értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol az adott kifejezés értelmezhető.

Kikötések az értelmezési tartomány meghatározásához:

1) $\frac{1}{a}$ esetén $a \neq 0$

2) páros gyökvonásnál: $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[6]{a}$ stb. esetén $a \geq 0$

(páratlan gyökvonásnál: $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$ stb. $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges, nincs kikötés)

3) $\log_a(b)$ esetén $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$

Ha több kikötést is teszünk, akkor ezeknek a feltételeknek egyszerre kell teljesülniük, tehát az értelmezési tartomány a megfelelő halmazok metszete lesz.

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát.

1. $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 6}$

Kikötés: A négyzetgyökjel alatti kifejezés nemnegatív:

$$-x^2 + x + 6 \geq 0 \iff x^2 - x - 6 \leq 0 \iff (x+2)(x-3) \leq 0$$

Az $x \mapsto (x+2)(x-3)$ másodfokú függvény gyökei $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Mivel a főegyüttható pozitív, ezért a grafikonja felfelé nyíló parabola, amely a két gyök között negatív.

Így az f függvény értelmezési tartománya: $-2 \leq x \leq 3$.

(Másképp: az $x \mapsto -x^2 + x + 6 = -(x+2)(x-3)$ függvény főegyütthatója negatív, ezért a grafikonja lefelé nyíló parabola, amely a két gyök között pozitív $\Longrightarrow$ $D_f = [-2, 3]$.)

2. $f(x) = \dfrac{\log_3(x+1)}{16 - 2^{x^2}}$

Kikötések: 1) A logaritmus argumentuma pozitív: $x + 1 > 0 \iff x > -1$

2) A tört nevezője nem nulla: $16 - 2^{x^2} \neq 0 \iff 2^{x^2} \neq 16 = 2^4 \iff x^2 \neq 4 \iff x \neq \pm 2$

$\Longrightarrow$ az f függvény értelmezési tartománya: $-1 < x < 2$ vagy $x > 2$.

3. $f(x) = \sqrt{1 - \lg(x+2)}$

Kikötések: 1) A logaritmus argumentuma pozitív: $x + 2 > 0 \iff x \geq -2$

2) A négyzetgyökjel alatti kifejezés nemnegatív:

$$1 - \lg(x+2) \geq 0 \iff \lg(x+2) \leq 1 = \lg 10 \Longrightarrow x + 2 \leq 10 \iff x \leq 8$$

$\Longrightarrow$ az f függvény értelmezési tartománya: $-2 < x \leq 8$.

Inverz függvény

Definíció: Azt mondjuk, hogy az f függvény **invertálható**, ha kölcsönösen egyértelmű, azaz minden $x, y \in D_f$, $x \neq y$ esetén $f(x) \neq f(y)$.

Ekkor az f függvény inverzének nevezzük és f^{-1}-gyel jelöljük azt a függvényt, amely minden $y \in R_f$ számhoz azt az $x \in D_f$ számot rendeli $\left(f^{-1}(y) = x\right)$, amelyre $f(x) = y$.

Megjegyzés: A definícióból adódik, hogy

- $D_{f^{-1}} = R_f$ és $R_{f^{-1}} = D_f$,
- minden $x \in D_f$ esetén $\left(f^{-1}(f(x)) = x\right.$,
- minden $y \in R_f$ esetén $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$.

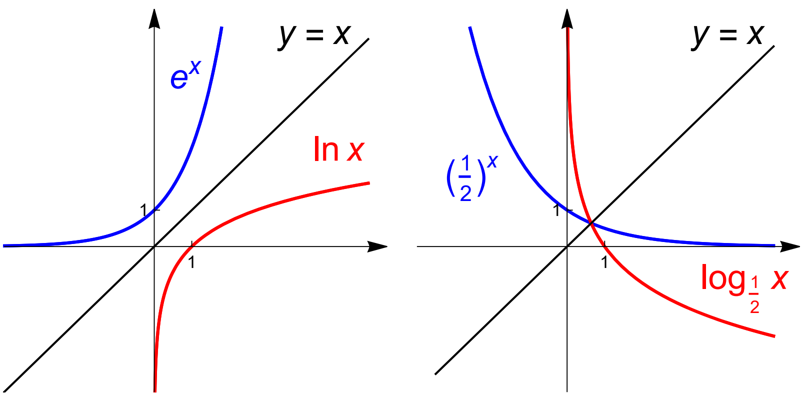
Az f^{-1} és f grafikonjai egymásnak az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükörképei.

Tétel: Ha az f függvény szigorúan monoton, akkor invertálható, és az inverze is ugyanolyan értelemben szigorúan monoton (azaz f és f^{-1} egyszerre szig. mon. növő vagy szig. mon. csökkenő).

Példák

1. Legyen $a > 0$, $a \neq 1$. Ekkor az a alapú exponenciális és logaritmusfüggvény egymás inverzei.

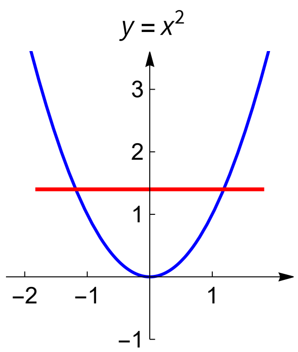
Ha $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$, $f(x) = a^x$ és $g : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \log_a x$, akkor
- minden $x \in (0, \infty)$ esetén $f(g(x)) = a^{\log_a x} = x$, és
- minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $g(f(x)) = \log_a(a^x) = x$.

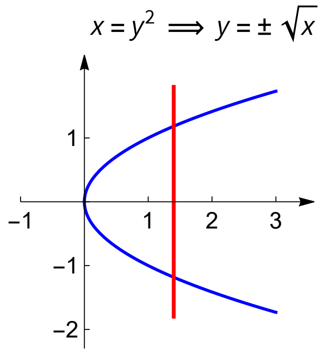


2. Az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény nem invertálható $\mathbb{R}$-en.

Láttuk, hogy az $f(x) = x^2$ függvény $\left(y = x^2\right)$ nem injektív, azaz nem invertálható $\mathbb{R}$-en, mivel különböző értékekhez is ugyanazt az értéket rendeli, pl. $x^2 = 4$ esetén $x = 2$ vagy $x = -2$.

Ezért a fordított hozzárendelést megadó görbe $\left(x = y^2\right)$ nem függvény grafikonja.

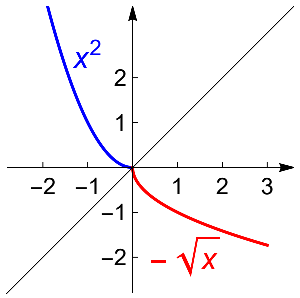




A függvényt leszűkíthetjük valamely alkalmas intervallumra úgy, hogy invertálható legyen. Például f szigorúan monoton a $(-\infty, 0]$ vagy $[0, \infty)$ vagy $[2, 5]$ stb. intervallumokon, így a leszűkítésének ezeken az intervallumokon létezik inverze.

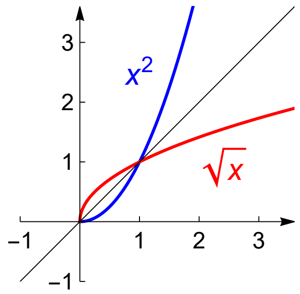
$g : (-\infty, 0] \longrightarrow [0, \infty), \; g(x) = x^2$

$g^{-1} : [0, \infty) \longrightarrow (-\infty, 0], \; g^{-1}(x) = -\sqrt{x}$



$h : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty), \; h(x) = x^2$

$h^{-1} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty), \; h^{-1}(x) = \sqrt{x}$

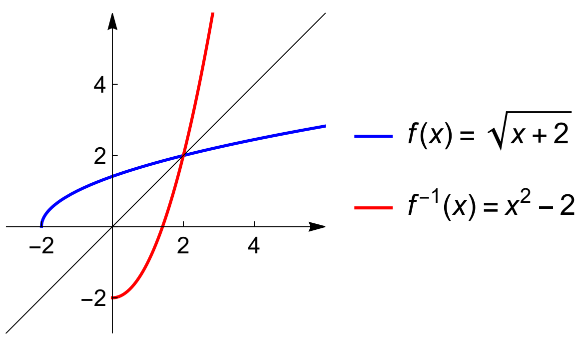


Az inverz meghatározása

1. Adjuk meg az $f(x) = \sqrt{x+2}$, $x \geq -2$ függvény inverzét.

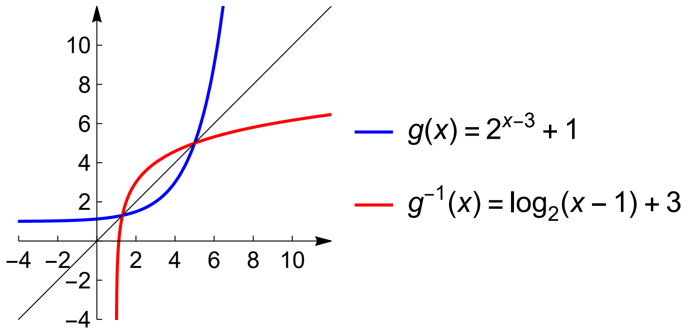
f értelmezési tartománya és értékkészlete: $D_f = [-2, \infty)$, $R_f = [0, \infty)$. A függvény szigorúan monoton növő a $[-2, \infty)$ intervallumon, így létezik inverze. Az inverz meghatározásához az $y = \sqrt{x+2}$ képletben cseréljük az x-et az y-nal, és fejezzük ki az y-t:

$x = \sqrt{y+2} \implies x^2 = y + 2 \implies y = x^2 - 2$, így az inverz függvény: $f^{-1}(x) = x^2 - 2$, $x \in [0, \infty)$



2. Adjuk meg a $g(x) = 2^{x-3} + 1$ függvény inverzét.

$D_g = \mathbb{R}$, $R_g = (1, \infty)$. A függvény szigorúan monoton növő, így létezik inverze. Az inverz meghatározása: $y = 2^{x-3} + 1 \implies x = 2^{y-3} + 1 \implies x - 1 = 2^{y-3} \implies y - 3 = \log_2(x-1) \implies$ $y = \log_2(x-1) + 3$, így az inverz függvény: $g^{-1}(x) = \log_2(x-1) + 3$, $x \in (1, \infty)$

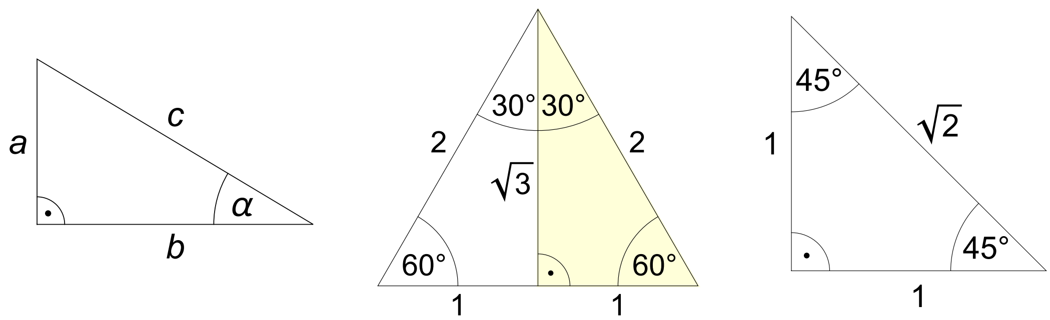


Trigonometrikus függvények és inverzeik

Hegyesszögek szögfüggvényei

Derékszögű háromszögben az α hegyesszög szinusza, koszinusza, tangense, kotangense $(0 < \alpha < 90°)$:

- $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{szöggel szemközi befogó}}{\text{átfogó}}$
- $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}}$
- $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{szöggel szemközi befogó}}{\text{szög melletti befogó}}$
- $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$



Nevezetes szögek szögfüggvényei (30 °, 45 °, 60 °)

- $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$
- $\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\operatorname{tg} 30° = \operatorname{ctg} 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $\operatorname{tg} 60° = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$
- $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = 1$

Szögek ívmértéke

- 1 radián nagyságú egy kör azon középponti szöge, amelynél az ív hossza egyenlő a kör sugarával.
- Példák: $360\,°$ ívmértéke $2\,\pi$ radián; $180\,°$ ívmértéke π radián; $90\,°$ ívmértéke $\frac{\pi}{2}$ radián;
  $60\,°$ ívmértéke $\frac{\pi}{3}$ radián; $45\,°$ ívmértéke $\frac{\pi}{4}$ radián; $30\,°$ ívmértéke $\frac{\pi}{6}$ radián.
- Kapcsolat egy szög fokokban ($\alpha°$) és radiánban (α_r) megadott értéke között: $\frac{\alpha°}{180\,°} = \frac{\alpha_r}{\pi}$

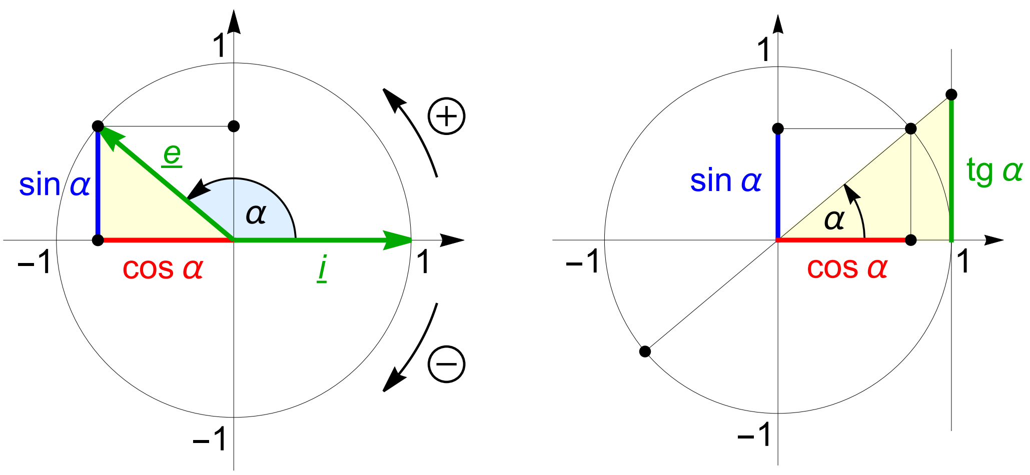
  $\Longrightarrow$ $\alpha_r = 1$ radián: $\alpha° = \frac{180\,°}{\pi} \approx 57.2958\ldots\,°$

Forgásszögek szögfüggvényei ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Definíciók:

- Forgassuk el az $\underline{i} = (1,\ 0)$ vektort az origó körül α forgásszöggel. Az így kapott $\underline{e}$ egységvektor végpontjának első koordinátája $\cos\alpha$, második koordinátája $\sin\alpha$.
- $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ha $\cos\alpha \neq 0$, azaz $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
- $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, ha $\sin\alpha \neq 0$, azaz $\alpha \neq k\,\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Megjegyzés: Az α forgásszög tangense az $x = 1$ egyenletű egyenesen olvasható le, felhasználva, hogy hasonló háromszögek oldalarányaiból $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1}$.

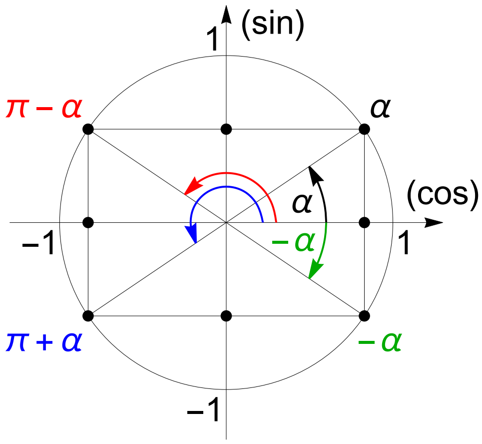


A definíciókból következik:
- $-1 \le \sin\alpha \le 1$, $-1 \le \cos\alpha \le 1$
- Pitagorasz-tétel: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén:
- $\sin\alpha = \sin(\alpha + k \cdot 2\,\pi)$,
- $\cos\alpha = \cos(\alpha + k \cdot 2\,\pi)$,
- $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot \pi)$,
- $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot \pi)$

Néhány azonosság

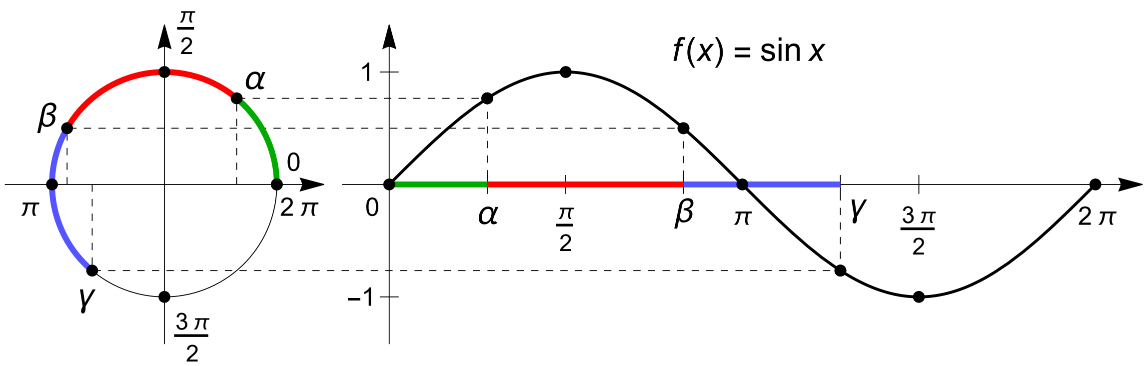
Az egységkörön lévő pontok 1. és 2. koordinátájának összehasonlításával néhány azonosság:

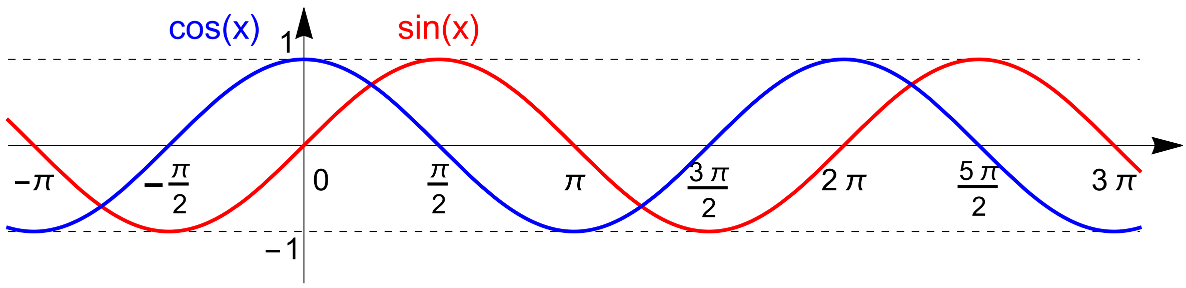


- $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

- $\sin(\pi + \alpha) = \sin(-\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi + \alpha)$

A szinusz- és koszinuszfüggvény





Értelmezési tartomány: • $D_{\sin} = \mathbb{R}$, $D_{\cos} = \mathbb{R}$

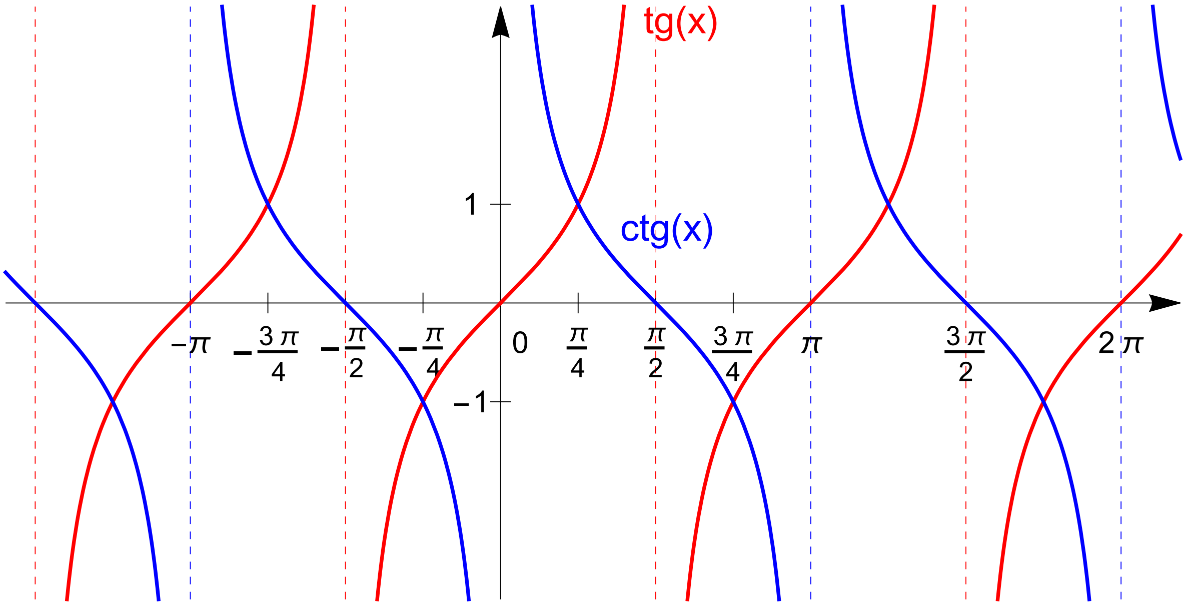
Értékkészlet: • $R_{\sin} = [-1, 1]$, $D_{\cos} = [-1, 1]$

Periodicitás:
- $\sin\alpha = \sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$, $\Longrightarrow$ a szinusz- és koszinuszfüggvény
- $\cos\alpha = \cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$ 2 π szerint periodikus

Paritás:
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\Longrightarrow$ a szinuszfüggvény páratlan (grafikonja tükrös az origóra)
- $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ $\Longrightarrow$ a koszinuszfüggvény páros (grafikonja tükrös az y tengelyre)

Zérushelyek:
- $\sin x = 0 \iff x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
- $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

A tangens- és kotangensfüggvény



Értelmezési tartomány: • $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ott van értelmezve, ahol $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$

• $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ ott van értelmezve, ahol $\sin x \neq 0$, azaz $x \neq k\,\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$

$$\Longrightarrow D_{\mathrm{tg}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\,\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad D_{\mathrm{ctg}} = \mathbb{R} \setminus \{ k\,\pi : k \in \mathbb{Z} \}$$

Értékkészlet: • $R_{\mathrm{tg}} = \mathbb{R}$, $D_{\mathrm{ctg}} = \mathbb{R}$

Periodicitás: • $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot \pi) \;\; (k \in \mathbb{Z})$, $\Longrightarrow$ a tangens- és kotangensfüggvény

• $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot \pi) \;\; (k \in \mathbb{Z})$ $\quad$ π szerint periodikus

Paritás: • $\operatorname{tg}(-\alpha) = \dfrac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \dfrac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$ $\Longrightarrow$ a tanges- és kotangensfüggvény páratlan

• $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ $\quad$ (grafikonjuk tükrös az origóra)

Zérushelyek: • $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = 0 \Longleftrightarrow \sin x = 0 \Longleftrightarrow x = k\,\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$

• $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = 0 \Longleftrightarrow \cos x = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$

Az arkusz függvények

- Az $f(x) = \sin x$ függvény szigorúan monoton a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon

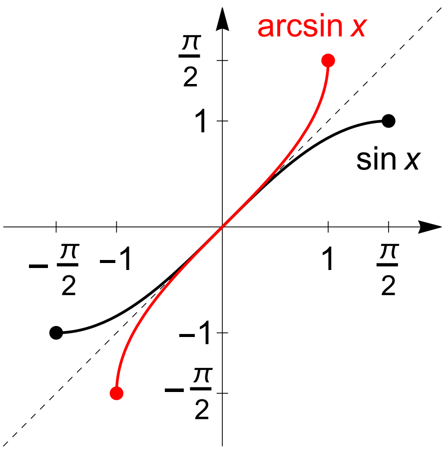
  $\Longrightarrow$ a leszűkítésének ezen az intervallumon létezik inverze.

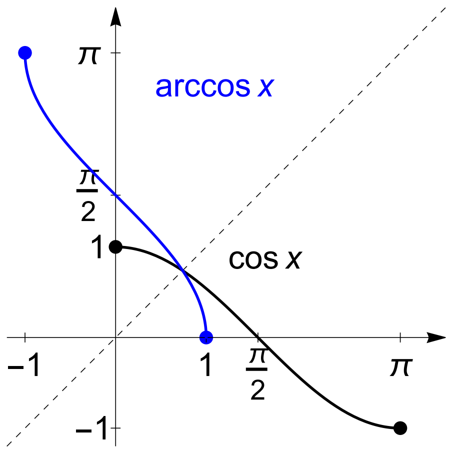
  Az arkusz szinusz függvény: $\arcsin x = \left(\sin\,|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}$; $D_{\arcsin} = [-1, 1]$, $R_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Az $f(x) = \cos x$ függvény szigorúan monoton a $[0, \pi]$ intervallumon

  $\Longrightarrow$ a leszűkítésének ezen az intervallumon létezik inverze.

  Az arkusz koszinusz függvény: $\arccos x = \left(\cos\,|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$; $D_{\arccos} = [-1, 1]$, $R_{\arccos} = [0, \pi]$.





- Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$ függvény szigorúan monoton a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon

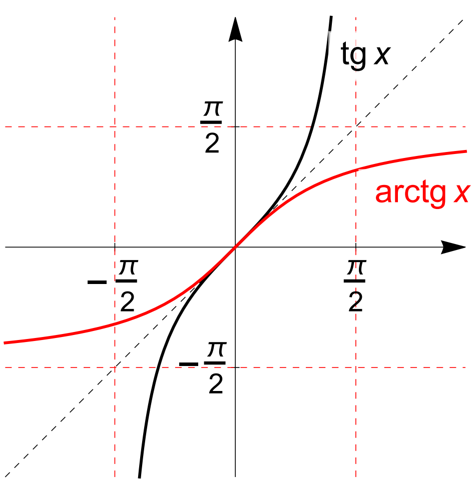
  $\Longrightarrow$ a leszűkítésének ezen az intervallumon létezik inverze.

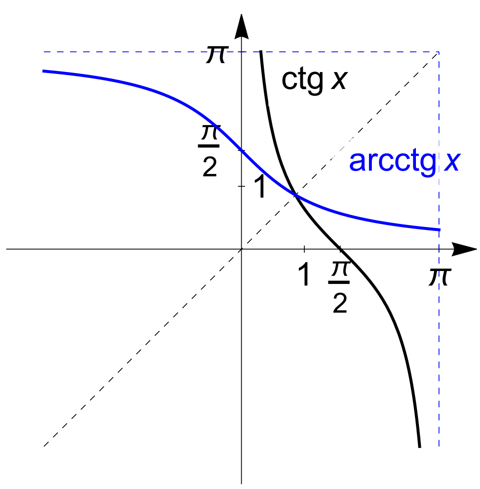
  Az arkusz tangens függvény: $\operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{tg}\,|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}$; $D_{\operatorname{arctg}} = \mathbb{R}$, $R_{\operatorname{arctg}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

- Az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ $(x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$ függvény szigorúan monoton a $(0, \pi)$ intervallumon

  $\Longrightarrow$ a leszűkítésének ezen az intervallumon létezik inverze.

  Az arkusz kotangens függvény: $\operatorname{arcctg} x = \left(\operatorname{ctg}\,|_{(0,\pi)}\right)^{-1}$; $D_{\operatorname{arcctg}} = \mathbb{R}$, $R_{\operatorname{arcctg}} = (0, \pi)$.





Néhány azonosság

1) Addíciós képletek: $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \implies \sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \implies \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$

2) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \implies \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

3) $1 + \text{tg}^2 x = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} \implies \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\text{tg}^2 x}$

Feladatok

Értelmezési tartomány

Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

1. a) $f(x) = \sqrt{x^2+3x-10}$ b) $f(x) = \dfrac{\lg(x)}{\sqrt{x^2-10x+21}}$ c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x-4)(x+1)}{x}}$

d) $f(x) = \sqrt{x(x-4)(x+1)}$ e) $f(x) = \sqrt{5 - |x+2|}$ f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-|x-1|}}$

2. a) $f(x) = \lg(x) + \sqrt{-x}$ b) $f(x) = \sqrt{2+\log_3(x)}$ c) $f(x) = \ln\left(x - \dfrac{4}{x}\right)$

d) $f(x) = \lg\left(2+x-x^2\right)$ e) $f(x) = \lg\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)$ f) $f(x) = \lg(x-3) - \lg(x+2)$

3. a) $f(x) = \dfrac{1}{3-\sqrt{2-x}}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{\lg(x)-2}$ c) $f(x) = \lg(5 - |1-x|)$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{10-x}}{\log_2(x-3)}$ e) $f(x) = \lg(2^x-4) + \sqrt{9-x^2}$ f) $f(x) = \dfrac{1}{\log_2\left(\dfrac{x^2+1}{2}\right)}$

Trigonometrikus egyenletek

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ c) $\sin(4x) = 1$ d) $\sin x = 0.6$ e) $\cos(3x) = 0$

f) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ g) $\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$ h) $\cos x = 0.2$ i) $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$ j) $\text{tg}(2x) = 1$

Segédanyag:
https://math.bme.hu/bevmat/szogfuggvenyek.pdf

2. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:
   a) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ b) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ c) $\operatorname{tg} x = \sin x$

Függvények tulajdonságai

1. Legyen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mindenhol értelmezett függvény. Mit mondhatunk az $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ és az $f \circ g$ függvények paritásáról abban az esetben, amikor f és g páros, illetve páratlan függvények?

2. Az alábbi függvények közül melyek injektívek?
   a) $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2^x$ b) $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln(x)$
   c) $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x| + 2x$ d) $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2|x| + x$
   e) $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x$ f) $f : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x$

3. Határozzuk meg az alábbi $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvények legkisebb pozitív periódusát.
   a) $f(x) = \sin(3x)$ b) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{4}\right)$ c) $f(x) = \cos(8x)$ d) $f(x) = \cos\left(\frac{2x}{7}\right)$
   e) $f(x) = \operatorname{tg}(5x)$ f) $f(x) = \sin(kx)$ g) $f(x) = \cos(kx)$ h) $f(x) = \operatorname{tg}(kx)$

Eredmények

Értelmezési tartomány

1. a) $x \le -5$ vagy $x \ge 2$ **b)** $0 < x < 3$ vagy $x > 7$ **c)** $-1 \le x < 0$ vagy $x \ge 4$
d) $-1 \le x \le 0$ vagy $x \ge 4$ **e)** $-7 \le x \le 3$ **f)** $-2 < x < 4$

2. a) $\varnothing$ **b)** $x \ge \frac{1}{9}$ **c)** $-2 < x < 0$ vagy $x > 2$ **d)** $-1 < x < 2$ **e)** $x < -2$ vagy $x > 3$ **f)** $x > 3$

3. a) $x < -7$ vagy $-7 < x \le 2$ **b)** $0 < x < 100$ vagy $x > 100$ **c)** $-4 < x < 6$
d) $3 < x < 4$ vagy $4 < x \le 10$ **e)** $2 < x \le 3$ **f)** $x < -1$ vagy $-1 < x < 1$ vagy $x > 1$

Trigonometrikus egyenletek - eredmények

1. feladat

a) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $x_2 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

b) $x_1 = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, $x_2 = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

c) $x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \cdot 2\pi)$

d) $x_1 = \arcsin(0.6) + k\cdot 2\pi \approx 0.643501 + k\cdot 2\pi$,

$x_2 = \pi - \arcsin(0.6) + k\cdot 2\pi \approx 2.49809 + k\cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

e) $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$

f) $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

g) $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi, \quad x_{3,4} = \pm\frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

h) $x_{1,2} = \pm\arccos(0.2) + k\cdot 2\pi \approx \pm 1.36944 + k\cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

i) $x = \frac{2\pi}{3} + k\cdot\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

j) $x = \frac{\pi}{8} + k\cdot\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

2. feladat

a) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

b) $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi, \quad x_3 = \pi + k\cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

c) $x = k\cdot\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Függvények tulajdonságai

1. feladat:

Összeg, különbség:

1. f páros, g páros $\Longrightarrow f+g,\ f-g$ páros
2. f páratlan, g páratlan $\Longrightarrow f+g,\ f-g$ páratlan

Szorzat, hányados:

3. f páros, g páros $\Longrightarrow f\cdot g,\ \frac{f}{g}$ páros (pl. $x^2\cdot x^4 = x^6$)
4. f páratlan, g páratlan $\Longrightarrow f\cdot g,\ \frac{f}{g}$ páros (pl. $x\cdot x^3 = x^4$)
5. f páros, g páratlan $\Longrightarrow f\cdot g,\ \frac{f}{g}$ páratlan (pl. $x^2\cdot x^3 = x^5$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$)

Összetett függvény:

6. f tetszőleges, g páros $\Longrightarrow f\circ g$ páros
7. f páros, g páratlan $\Longrightarrow f\circ g$ páros
8. f páratlan, g páratlan $\Longrightarrow f\circ g$ páratlan

Néhány bizonyítás:

3. két páros függvény szorzata páros: $(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f(x)}\cdot\boldsymbol{g(x)} = \boldsymbol{f(-x)}\cdot\boldsymbol{g(-x)} = (\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})(-\boldsymbol{x})$

4. két páratlan függvény szorzata páros: $(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f(-x)}\cdot\boldsymbol{g(-x)} = (-\boldsymbol{f(x)})\cdot(-\boldsymbol{g(x)}) = f(x)\cdot g(x) = (\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$

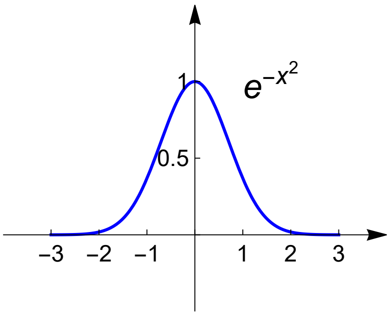
6. $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(-x)) = (f\circ g)(-x)$

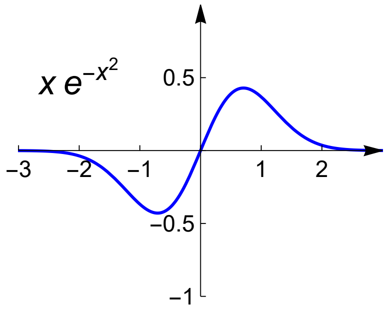
7. $(f\circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = (f\circ g)(x)$

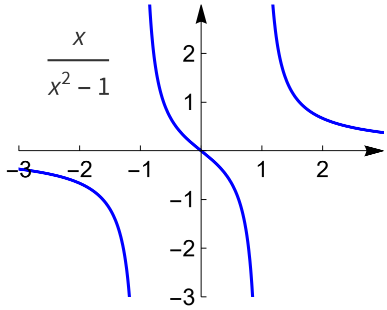
8. $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -(f \circ g)(x)$

Példa:

6. $x \mapsto e^{-x^2}$ páros   5. a) $x \mapsto x\, e^{-x^2}$ páratlan   b) $x \mapsto \dfrac{x}{x^2 - 1}$ páratlan







2. feladat

Felhasználjuk: Ha $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő, akkor $f + g$ is szigorúan monoton növő.

Injektív függvények: a) b) c) e)

3. feladat

a) $\dfrac{2\pi}{3}$ b) $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$ c) $\dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$ d) $\dfrac{2\pi}{\frac{2}{7}} = 7\pi$ e) $\dfrac{\pi}{5}$ f) $\dfrac{2\pi}{k}$ g) $\dfrac{2\pi}{k}$ h) $\dfrac{\pi}{k}$