Matematika MC, 2-3. előadás

1. A hatványozás és gyökvonás azonosságai.
2. A logaritmus fogalma.
3. Függvények néhány tulajdonsága (injektivitás, korlátosság, monotonitás, paritás, szélsőérték)
4. Exponenciális és logaritmusfüggvény.

1. A hatványozás és gyökvonás azonosságai

Definíciók

Egész kitevőjű hatványok ($n \in \mathbb{Z}^+$):

- Ha $a \in \mathbb{R}$: $\quad a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad (n \text{ tényező}), \qquad a^1 = a$
- Ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\quad a^{-1} = \dfrac{1}{a}, \qquad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n, \qquad a^0 = 1$

Racionális kitevőjű hatványok ($a, b \in \mathbb{R}_0^+$; $k, n \in \mathbb{Z}^+$; $k \geq 2$):

- $\sqrt[k]{a} = b \iff a = b^k$
- $a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}, \qquad a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}, \qquad a^{-\frac{n}{k}} = \dfrac{1}{\sqrt[k]{a^n}} \quad (a > 0)$

Megjegyzés: Ha k páratlan, akkor $a < 0$ esetén is értelmezhető $\sqrt[k]{a}$.

A hatványozás azonosságai

($a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $x, y \in \mathbb{Z}$; vagy $a, b \in \mathbb{R}^+$; $x, y \in \mathbb{Q}$ vagy $\mathbb{R}$)

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{x\,y}$
4. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

A gyökvonás azonosságai

($a, b \in \mathbb{R}_0^+$; $k, m, n \in \mathbb{Z}^+$; $k, m \geq 2$)

1. $\sqrt[k]{a \cdot b} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b}$
2. $\sqrt[k]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}} \quad (b \neq 0)$
3. $\sqrt[k]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[k \cdot m]{a}$
4. $\left(\sqrt[k]{a}\right)^n = \sqrt[k]{a^n} = a^{\frac{n}{k}}$

2. A logaritmus fogalma

Definíció

A b szám a alapú logaritmusa az a kitevő, amelyre a-t emelve b-t kapunk:

$\log_a b = c \iff a^c = b \quad (a, b \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1,\ c \in \mathbb{R})$

A logaritmus alapja a, argumentuma b.

Következmény

- $\log_a(a^c) = c, \qquad a^{\log_a b} = b$
- $\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1, \qquad \log_a\left(\frac{1}{a}\right) = \log_a(a^{-1}) = -1$

Azonosságok

$(a, b, x, y \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, b \neq 1, c \in \mathbb{R})$

1. Szorzat logaritmusa: $\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y$
2. Hányados logaritmusa: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. Hatvány logaritmusa: $\log_a(x^c) = c \cdot \log_a x$
4. Áttérés más alapú logaritmusra: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Jelölés

Természetes alapú logaritmus: $\ln x = \log_e x$, ahol $e \approx 2.7182818 \ldots$ az Euler-féle szám.

10-es alapú logaritmus: $\lg x = \log_{10} x$.

Feladatok

1. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét.

a) $\log_2 2,\ \log_2 4,\ \log_2 8,\ \log_2 16,\ \log_2\left(\frac{1}{2}\right),\ \log_2\left(\frac{1}{4}\right),\ \log_2\left(\frac{1}{8}\right),\ \log_2\left(\frac{1}{16}\right)$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 2,\ \log_{\frac{1}{2}} 4,\ \log_{\frac{1}{2}} 8,\ \log_{\frac{1}{2}} 2,\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right),\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right),\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right),\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{16}\right)$

c) $\log_2 1,\ \log_{\frac{1}{2}} 1,\ \log_2 0,\ \log_2(-1)$

Megoldás. Írjuk fel az argumentumot az alap hatványaként. Ekkor a logaritmus értéke az argumentum kitevője lesz.

a)

- $\log_2 2 = \log_2 2^1 = 1$
- $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$
- $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
- $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$
- $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 2^{-1} = -1$
- $\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^2}\right) = \log_2(2^{-2}) = -2$
- $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^3}\right) = \log_2 2^{-3} = -3$
- $\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^4}\right) = \log_2 2^{-4} = -4$

b)

- $\log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right) = -1$
- $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right) = -2$
- $\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right) = -3$
- $\log_{\frac{1}{2}} 16 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\right) = -4$
- $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\right) = 1$
- $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right) = 2$
- $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right) = 3$
- $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{16}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\right) = 4$

c)

- $\log_2 1 = \log_2 2^0 = 0$
- $\log_{\frac{1}{2}} 1 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\right) = 0$
- $\log_2 0$: nincs értelmezve
- $\log_2(-1)$: nincs értelmezve

2. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét.

a) $\log_4 2,\ \ \log_8 2,\ \ \log_{16} 2$

b) $\log_4\left(\frac{1}{2}\right),\ \ \log_8\left(\frac{1}{2}\right),\ \ \log_{16}\left(\frac{1}{2}\right)$

Megoldás.

a)

- $\log_4 2 = \log_4 \sqrt{4} = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
- $\log_8 2 = \log_8 \sqrt[3]{8} = \log_8 8^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$
- $\log_{16} 2 = \log_{16} \sqrt[4]{16} = \log_{16} 16^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$

b) Használhatjuk például a következő azonosságokat:

Hányados logaritmusa: $\boldsymbol{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$

Hatvány logaritmusa: $\boldsymbol{\log_a(x^c) = c \cdot \log_a x}$

- $\boldsymbol{\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = \log_4 1 - \log_4 2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$
- $\boldsymbol{\log_8\left(\frac{1}{2}\right) = \log_8 1 - \log_8 2} = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$
- $\boldsymbol{\log_{16}\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{16} 1 - \log_{16} 2} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$
- $\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\log_4(2^{-1}) = -\log_4 2} = -\frac{1}{2}$
- $\log_8\left(\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\log_8(2^{-1}) = -\log_8 2} = -\frac{1}{3}$
- $\log_{16}\left(\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\log_{16}(2^{-1}) = -\log_{16} 2} = -\frac{1}{4}$

3. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét.

a) $\log_8 4$ b) $\log_4 8$

1. megoldás

a) $\log_8 4 = ?$ Írjuk fel a 4-et a 8 hatványaként.

$$2^3 = 8,\ 2^2 = 4 \implies 2 = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} \implies 4 = 2^2 = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8^{\frac{1}{3}\cdot 2} = 8^{\frac{2}{3}}$$

$$\implies \log_8 4 = \log_8 8^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

b) $\log_4 8 = ?$ Írjuk fel a 8-at a 4 hatványaként.

$$2^3 = 8,\ 2^2 = 4 \implies 2 = \sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} \implies 8 = 2^3 = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 4^{\frac{1}{2}\cdot 3} = 4^{\frac{3}{2}}$$

$$\implies \log_4 8 = \log_4 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

2. megoldás: A feladat egyszerűbben is megoldható, ha a $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ azonosság alapján áttérünk 2-es alapú logaritmusra:

a) $\log_8 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 2^3} = \frac{2}{3}$ b) $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$

Észrevétel: $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \quad (a, b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1)$

4. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét.

a) $A = \log_2 2.4 + \log_2 3 - \log_2 0.9$ b) $B = 4\log_6 2 + 2\log_6 3 - \log_6 4$ c) $C = \frac{\lg 25}{2} + \frac{\lg 8}{3}$

Megoldás. Használjuk fel a következő azonosságokat:

1. $\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y$ 2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ 3. $\log_a(x^c) = c\cdot\log_a x$

a) Az 1. azonosság alapján: $A = \log_2 2.4 + \log_2 3 - \log_2 0.9 = \log_2(2.4\cdot 3) - \log_2 0.9 =$

A 2. azonosság alapján: $= \log_2(7.2) - \log_2 0.9 = \log_2\left(\frac{7.2}{0.9}\right) = \log_2\left(\frac{72}{9}\right) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

b) A 3. azonosság alapján: $B = 4\log_6 2 + 2\log_6 3 - \log_6 4 = \log_6 2^4 + \log_6 3^2 - \log_6 4 =$

Az 1. és 2. azonosság alapján: $= \log_6 \frac{2^4\cdot 3^2}{4} = \log_6 \frac{16\cdot 9}{4} = \log_6(4\cdot 9) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

c) A 3. azonosság alapján: $C = \frac{\lg 25}{2} + \frac{\lg 8}{3} = \frac{1}{2}\lg 25 + \frac{1}{3}\lg 8 = \lg\left(25^{\frac{1}{2}}\right) + \lg\left(8^{\frac{1}{3}}\right) = \lg\left(\sqrt{25}\right) + \lg\left(\sqrt[3]{8}\right) =$

Az 1. azonosság alapján: $= \lg 5 + \lg 2 = \lg(5\cdot 2) = \lg 10 = 1$

3. Függvények, 1. rész

A függvény fogalma

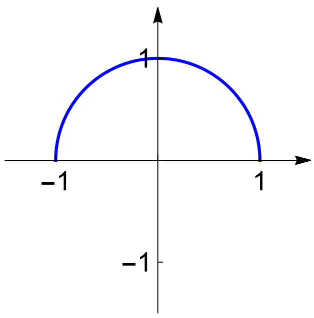
Definíció: • Legyen A és B két nemüres halmaz. Az $f : A \longrightarrow B$ függvény olyan egyértelmű hozzárendelés, amely **minden** $x \in A$ elemhez hozzárendel **pontosan egy** $y \in B$ elemet ($y = f(x)$).

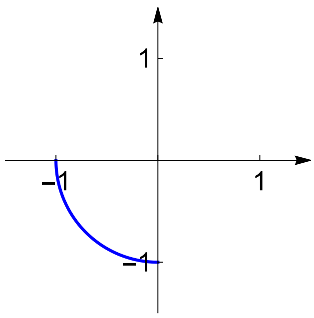
Az f függvény

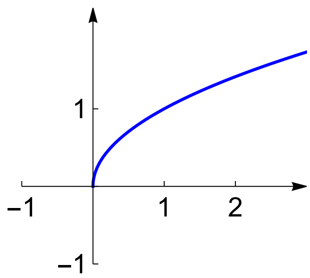
- értelmezési tartománya (domain): $D_f = A$
- értértékkészlete azon B-beli elemek halmaza, amelyek valamely A-beli elemhez hozzá vannak rendelve (range): $R_f = \{y \in B \mid \exists\, x \in A : \ y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}$
- képhalmaza: B ($R_f \subseteq B$)

Példák függvénygrafikonokra: minden $x \in D_f$-hez pontosan egy $y = f(x)$ tartozik

1) $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ 2) $f : [-1, 0] \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ 3) $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = \sqrt{x}$

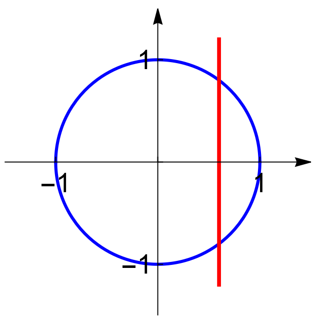


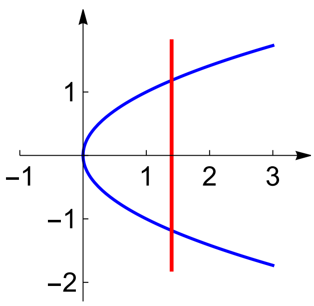




Az alábbi görbék nem függvények grafikonjai, mivel van olyan x, amelyhez egynél több y érték tartozik (grafikusan: van olyan függőleges egyenes, amely egynél több pontban metszi a görbét).

4) $x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ 5) $x = y^2 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{x}$





Abszolútérték-függvény, hatványfüggvények

Képletgyűjtemény, 4. oldal: https://math.bme.hu/bevmat/kepletek.pdf

Függvények néhány tulajdonsága

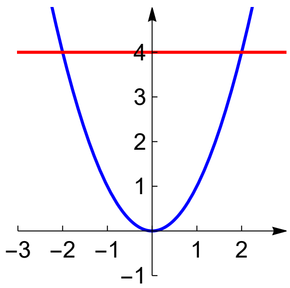
Injektivitás

Definíció: Az f függvény **injektív** vagy **kölcsönösen egyértelmű**, ha minden $x, y \in D_f$, $x \neq y$ esetén $f(x) \neq f(y)$, azaz különböző értékekhez különböző értékeket rendel. (Vagy: minden $x, y \in D_f$ esetén $x = y \iff f(x) = f(y)$.)

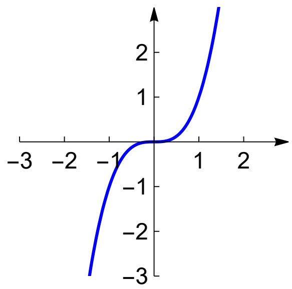
Példa: 1) $f(x) = x^2$ nem injektív $\mathbb{R}$-en, így pl. $x^2 = 4 \iff |\,x\,| = 2 \iff x = \pm 2$
Grafikusan: van olyan vízszintes egyenes, ami egynél több pontban metszi a grafikont.

2) $f(x) = x^3$ injektív $\mathbb{R}$-en (és $R_f = \mathbb{R}$), így minden vízszintes egyenes pontosan egy pontban metszi a grafikont $\Longrightarrow$ minden $a \in \mathbb{R}$ esetén az $x^3 = a$ egyenletnek pontosan egy megoldása van $\left(x = \sqrt[3]{a}\right)$.

1) $f(x) = x^2$



2) $f(x) = x^3$



Korlátosság

Definíció: • Az f függvény $\begin{cases} \text{felülről korlátos,} \\ \text{alulról korlátos,} \end{cases}$ ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, melyre $\begin{cases} f(x) \leq K, \\ f(x) \geq -K, \end{cases}$ ha $x \in D_f$,

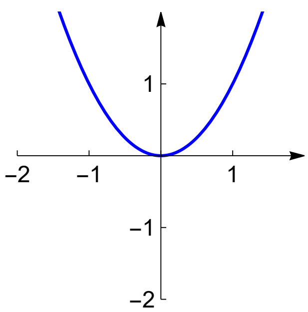
vagy másképp $\begin{cases} R_f \subset (-\infty, K]. \\ R_f \subset [-K, \infty). \end{cases}$

• Az f függvény korlátos, ha alulról és felülről is korlátos, azaz van olyan $K \in \mathbb{R}$, melyre $|\,f(x)\,| \leq K$, ha $x \in D_f$, vagy másképp $R_f \subset [-K, K]$.

Példák:

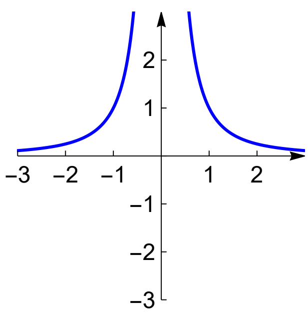
1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

alulról korlátos, felülről nem



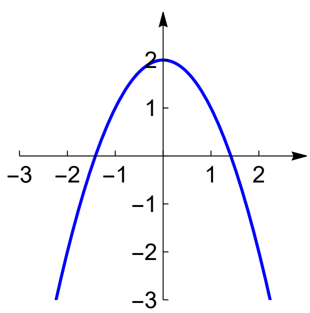
2) $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

alulról korlátos, felülről nem



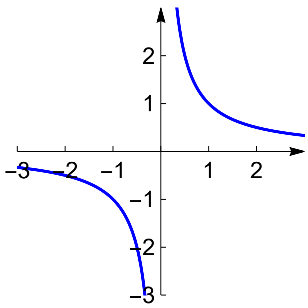
3) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2 - x^2$

felülről korlátos, alulról nem



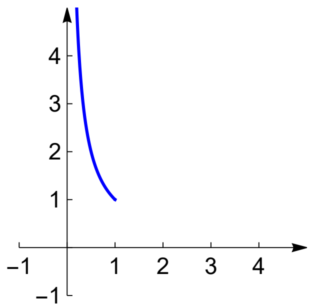
4) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$

nem korlátos



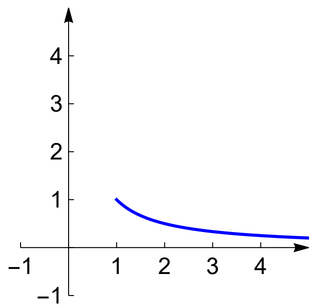
2) $f: (0,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$

alulról korlátos, felülről nem



3) $f: [1,\ \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$

korlátos (alulról és felülről is)



Monotonitás

Definíció: • Az f függvény $\left\{ \begin{array}{c} \text{monoton nő,} \\ \text{szigorúan monoton nő,} \end{array} \right.$ ha $x < y \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) \le f(y) \\ f(x) < f(y) \end{array} \right.$ $(x,\ y \in D_f)$.

• Az f függvény $\left\{ \begin{array}{c} \text{monoton csökken,} \\ \text{szigorúan monoton csökken,} \end{array} \right.$ ha $x < y \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) \ge f(y) \\ f(x) > f(y) \end{array} \right.$ $(x,\ y \in D_f)$.

Észrevétel: Ha f szigorúan monoton, akkor injektív.

Példákhoz ábrák: Képletgyűjtemény, 4. oldal: https://math.bme.hu/bevmat/kepletek.pdf

1) Szigorúan monoton nő pl. $x \mapsto x^3,\ x \mapsto \sqrt[3]{x},\ x \mapsto \sqrt{x},\ x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$

2) Szigorúan monoton csökken pl. $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

3) $f(x) = x^2$ szig. mon. csökken, ha $x \le 0$ és szig. mon. nő, ha $x \ge 0$, de nem monoton, ha $x \in \mathbb{R}$.

4) $f(x) = \frac{1}{x}$ szig. mon. csökken a $(-\infty,\ 0)$ és $(0,\ \infty)$ intervallumokon, de nem monoton, ha $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

5) Monoton nő és monoton csökken: $f(x) = c$ konstans függvény.

Paritás

Definíció: • Az f függvény **páros**, ha minden $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(x) = f(-x)$, azaz f grafikonja türkös az y tengelyre.

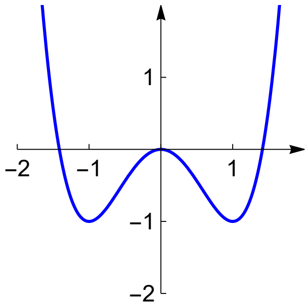
• Az f függvény **páratlan**, ha minden $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = -f(x)$, azaz f grafikonja türkös az origóra.

Példákhoz ábrák: Képletgyűjtemény, 4. oldal: https://math.bme.hu/bevmat/kepletek.pdf

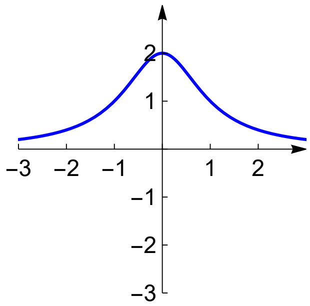
- Páros függvények pl.: $x \mapsto |\,x\,|,\ x \mapsto x^2,\ x \mapsto x^4,\ x \mapsto x^{-2} = \frac{1}{x^2},\ x \mapsto x^{-4} = \frac{1}{x^4}$
- Páratlan függvények pl.: $x \mapsto x,\ x \mapsto x^3,\ x \mapsto \sqrt[3]{x},\ x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x},\ x \mapsto x^{-2} = \frac{1}{x^3}$
- Nem páros és nem páratlan pl.: $x \mapsto \sqrt{x}$

Páros függvények pl.

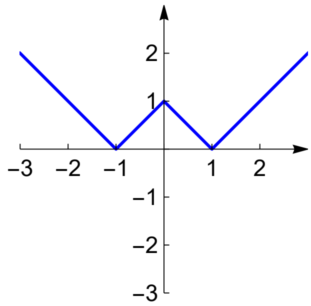
1) $f(x) = x^4 - 2x^2$



2) $f(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$

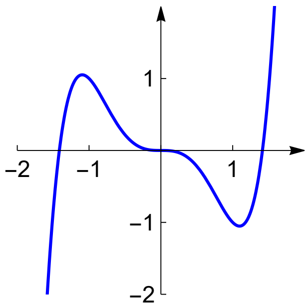


3) $f(x) = ||x| - 1|$

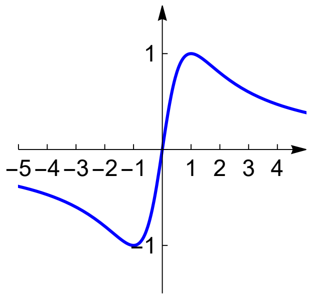


Páratlan függvények pl.

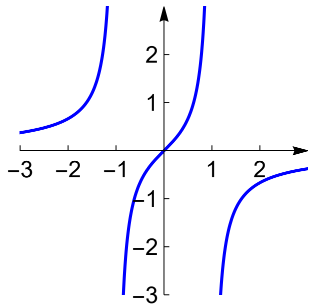
4) $f(x) = x^5 - 2x^3$



5) $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$



6) $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$

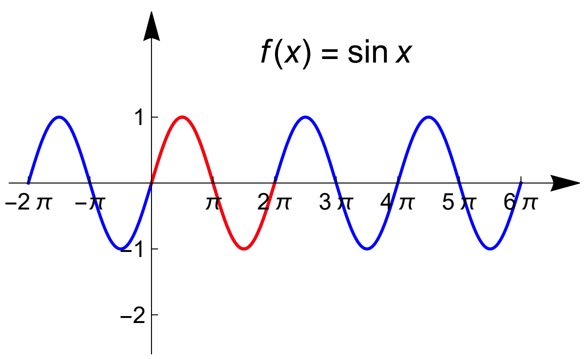


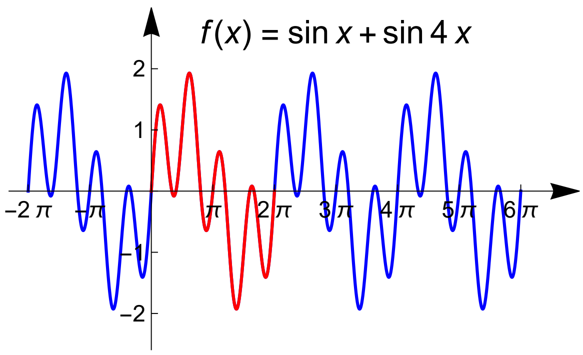
Periodikusság

Definíció: Az f függvény **periodikus** $p > 0$ periódussal, ha minden $x \in D_f$ esetén $x + p \in D_f$ és $f(x + p) = f(x)$.

Megjegyzés: A definíció geometriailag azt jelenti, hogy ha a függvénygrafikont a $(0, p)$ vektorral eltoljuk, akkor önmagába megy át.

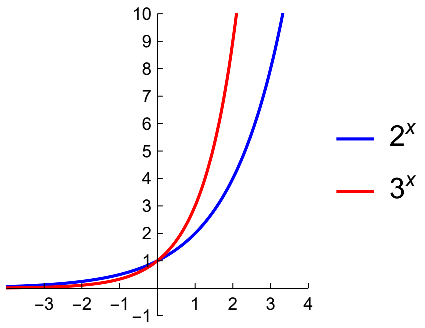
Példák: Trigonometrikus függvények (szinusz, koszinusz, tangens, kotanges), ld. később.

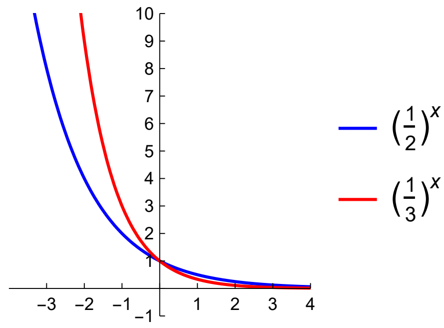




4. Exponenciális és logaritmusfüggvény

Az exponenciális függvények grafikonja



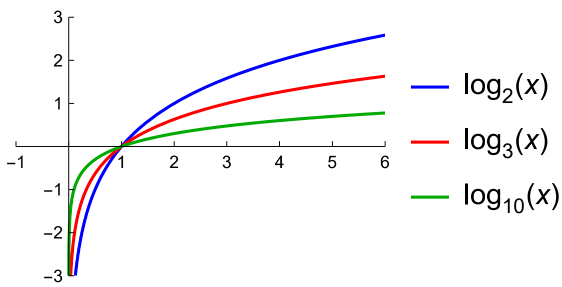


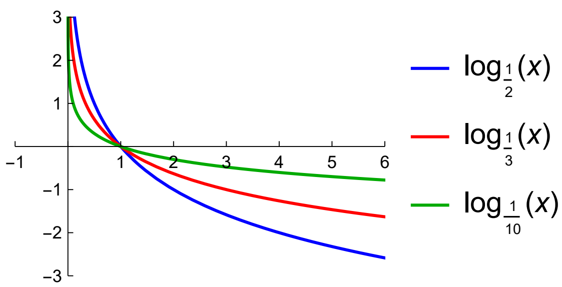
1. Legyen $f(x) = a^x$, ahol $a > 1$. Ekkor
   - $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \mathbb{R}^+$
   - f szigorúan monoton növő

2. Legyen $f(x) = a^x$, ahol $0 < a < 1$. Ekkor
   - $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \mathbb{R}^+$
   - f szigorúan monoton csökkenő

Észrevétel: a $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ függvény grafikonja az $f(x) = 2^x$ függvény grafikonjának az y tengelyre vonatkozó türkörképe

A logaritmusfüggvények grafikonja





1. Legyen $f(x) = \log_a x$, ahol $a > 1$. Ekkor
   - $D_f = \mathbb{R}^+$, $R_f = \mathbb{R}$
   - zérushely: $f(x) = 0 \iff x = 1$
   - $f(x) < 0$, ha $0 < x < 1$ és $f(x) > 0$, ha $x > 1$
   - f szigorúan monoton növő

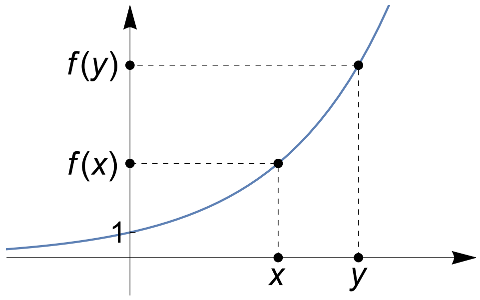
2. Legyen $f(x) = \log_a x$, ahol $0 < a < 1$. Ekkor
   - $D_f = \mathbb{R}^+$, $R_f = \mathbb{R}$
   - zérushely: $f(x) = 0 \iff x = 1$
   - $f(x) > 0$, ha $0 < x < 1$ és $f(x) < 0$, ha $x > 1$
   - f szigorúan monoton csökkenő

Észrevétel: $\log_{\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{\log_2(x)}{\log_2 \frac{1}{2}} = \dfrac{\log_2(x)}{\log_2 2^{-1}} = \dfrac{\log_2(x)}{-1} = -\log_2(x)$

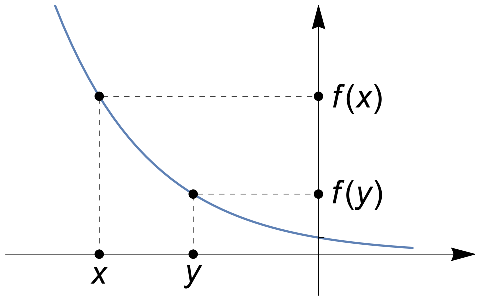
$\Longrightarrow$ az $f(x) = \log_2(x)$ függvény grafikonja a $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x) = -\log_2(x)$ függvény grafikonjának az x tengelyre vonatkozó türkörképe

Exponenciális és logaritmusos egyenlőtlenségek

$f(x) = a^x \ \ (a > 1)$

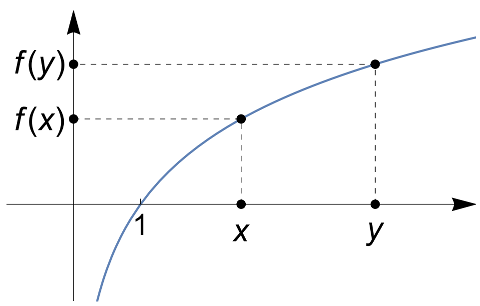


$f(x) = a^x \ \ (0 < a < 1)$

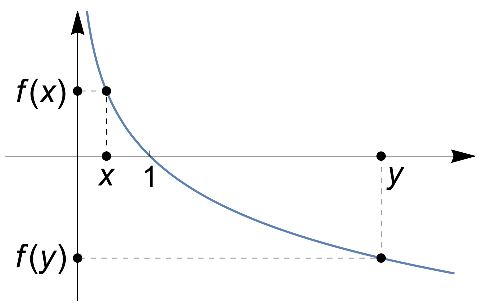


- Ha $a > 1$, akkor $f(x) = a^x$ szigorúan monoton növő, így $x < y \iff a^x < a^y$.
- Ha $0 < a < 1$, akkor $f(x) = a^x$ szigorúan monoton csökkenő, így $x < y \iff a^x > a^y$.

$f(x) = \log_a x \ \ (a > 1)$



$f(x) = \log_a x \ \ (0 < a < 1)$



- Ha $a > 1$, akkor $f(x) = \log_a x$ szigorúan monton növő, így $0 < x < y \iff \log_a x < \log_a y$.
- Ha $0 < a < 1$, akkor $f(x) = \log_a x$ szigorúan monoton csökkenő, így $0 < x < y \iff \log_a x > \log_a y$.

Példa

Szemléltessük, milyen gyorsan nő pl. a 10-es alapú exponenciális függvény. Legyen a tengelyeken egy egység 1 cm.

- $x = 1$ cm $\implies y = 10^1$ cm $= 10$ cm
- $x = 2$ cm $\implies y = 10^2$ cm $= 100$ cm $= 1$ m
- $x = 3$ cm $\implies y = 10^3$ cm $= 1000$ cm $= 10$ m
- $x = 4$ cm $\implies y = 10^4$ cm $= 10^2$ m
- $x = 5$ cm $\implies y = 10^5$ cm $= 10^3$ m $= 1$ km
- $x = 6$ cm $\implies y = 10^6$ cm $= 10^4$ m $= 10$ km
- $x = 7$ cm $\implies y = 10^7$ cm $= 10^5$ m $= 100$ km
- $x = 8$ cm $\implies y = 10^8$ cm $= 10^6$ m $= 1000$ km

- $x = 9$ cm $\implies y = 10^9$ cm $= 10^7$ m $= 10\,000$ km
- $x = 10$ cm $\implies y = 10^{10}$ cm $= 10^8$ m $= 100\,000$ km
- $x = 11$ cm $\implies y = 10^{11}$ cm $= 10^9$ m $= 1\,000\,000$ km
- $x = 12$ cm $\implies y = 10^{12}$ cm $= 10^{10}$ m $= 10\,000\,000$ km
- $x = 13$ cm $\implies y = 10^{13}$ cm $= 10^{11}$ m $= 100\,000\,000$ km

- az Egyenlítő hossza kb. 40 075 km
- a Hold Földtől mért átlagos távolsága 384 402 km
- a Nap átmérője 1 392 000 km
- a Nap távolsága a Földtől kb. 150 000 000 km

Feladatok

A logaritmus fogalma

Számítsa ki az alábbi kifejezések értékét:

1. a) $\lg 0.001$ **b)** $\lg 10\,000$ **c)** $\lg \sqrt{10}$ **d)** $\ln e$ **e)** $\ln 1$ **f)** $\ln e^3$ **g)** $\ln \frac{1}{e^2}$

2. a) $\log_3(81)$ **b)** $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **c)** $\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{8}\right)$ **d)** $\log_{\frac{1}{3}}(27)$ **e)** $\log_5\left(\frac{1}{\sqrt{125}}\right)$ **f)** $\log_{\frac{1}{5}}(25)$

3. a) $\log_{\sqrt{2}}(8)$ **b)** $\log_8\left(\sqrt{2}\right)$ **c)** $\log_9(27)$ **d)** $\log_{27}(9)$ **e)** $\log_{16}(8)$ **f)** $\log_{16}\left(\frac{1}{8}\right)$

4. a) $e^{\ln 2}$ **b)** $10^{\lg 5}$ **c)** $10^{-\lg 5}$ **d)** $4^{\log_2(3)}$

Exponenciális és logaritmusos egyenletek

Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

5. a) $4^{3x-5} = \frac{1}{32}$ **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = \frac{27^{x+1}}{\sqrt{9^{2x+6}}}$ **c)** $3^{-x} = 36 \cdot 2^x$

d) $2^x + 2^{x+3} = 3^{x+1} - 3^{x-1}$ **e)** $e^{x^2-2} = \frac{1}{e^x}$ **f)** $4^x = 5 \cdot 2^x$

6. a) $9^x + 9 = 10 \cdot 3^x$ **b)** $4^x - 3 \cdot 2^{x-1} = 1$ **c)** $4^x + 6 \cdot 4^{-x} = 5$

7. a) $\lg(2x + 10) = 2$ **b)** $\lg(2) + 2\lg(x) + \lg\left(\frac{1}{2}\right) = 4$ **c)** $\log_2(x) + \log_2(3) = -1 + \log_2\left(x^2\right)$

d) $\frac{\log_7(x+4)}{\log_7(x+2)} = 2$ **e)** $\lg^2(x) - \lg\left(x^4\right) + 3 = 0$

Exponenciális és logaritmusos egyenlőtlenségek

Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

8. a) $\frac{1}{3} < 3^x \leq 81$ **b)** $0.1^x \geq 100$ **c)** $\frac{3}{1 + 4^{-x}} \leq 2$

d) $4^x < 2^{x^2-3}$ **e)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+12} < \left(\frac{9}{4}\right)^x$ **f)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} > 2^x$

9. a) $-2 < \lg(x) < 3$ **b)** $\log_2(x - 3) < 0$ **c)** $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 1) > 1$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(4x - 6) > -1$ **e)** $\lg(x) < \lg^2(x)$

Eredmények

A logaritmus fogalma

1. a) $\lg 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$ **b)** $\lg 10\,000 = \lg 10^4 = 4$ **c)** $\lg \sqrt{10} = \lg 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

d) $\ln e = \log_e e^1 = 1$ **e)** $\ln 1 = \ln e^0 = 0$ **f)** $\ln e^3 = 3$ **g)** $\ln \frac{1}{e^2} = \ln e^{-2} = -2$

2. a) $\log_3(81) = \log_3(3^4) = 4$ **b)** $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \log_2\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)$ **c)** $\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{8}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{3}{2}}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3}{2}$,

vagy: $\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{8}\right) = \frac{\log_2\left(\sqrt{8}\right)}{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\log_2\left(2^{\frac{3}{2}}\right)}{\log_2(2^{-1})} = \frac{\frac{3}{2}}{-1} = -\frac{3}{2}$ **d)** $\log_{\frac{1}{3}}(27) = \log_{\frac{1}{3}}(3^3) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right) = -3$

e) $\log_5\left(\frac{1}{\sqrt{125}}\right) = \log_5\left(5^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3}{2}$ **f)** $\log_{\frac{1}{5}}(25) = \frac{\log_5(25)}{\log_5\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{\log_5(5^2)}{\log_5(5^{-1})} = \frac{2}{-1} = -2$

3. a) $\log_{\sqrt{2}}(8) = \log_{\sqrt{2}}\left(\left(\sqrt{2}\right)^6\right) = 6$, vagy: $\log_{\sqrt{2}}(8) = \frac{\log_2(8)}{\log_2\left(\sqrt{2}\right)} = \frac{\log_2(2^3)}{\log_2\left(2^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$

b) $\log_8\left(\sqrt{2}\right) = \log_8\left(\sqrt{\sqrt[3]{8}}\right) = \log_8\left(\sqrt[6]{8}\right) = \log_8\left(8^{\frac{1}{6}}\right) = \frac{1}{6}$, vagy:

$\log_8\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\log_2\left(\sqrt{2}\right)}{\log_2(8)} = \frac{\log_2\left(2^{\frac{1}{2}}\right)}{\log_2(2^3)} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$

c) $\log_9(27) = \frac{\log_3(27)}{\log_3(9)} = \frac{\log_3(3^3)}{\log_3(3^2)} = \frac{3}{2}$ **d)** $\log_{27}(9) = \frac{\log_3(9)}{\log_3(27)} = \frac{\log_3(3^2)}{\log_3(3^3)} = \frac{2}{3}$

e) $\log_{16}(8) = \frac{\log_2(8)}{\log_2(16)} = \frac{\log_2(2^3)}{\log_2(2^4)} = \frac{3}{4}$ **f)** $\log_{16}\left(\frac{1}{8}\right) = \log_{16}(8^{-1}) = -\log_{16}(8) = -\frac{3}{4}$

4. Használjuk fel: $a^{\log_a b} = b$ $\Longrightarrow$ **a)** $e^{\ln 2} = 2$ **b)** $10^{\lg 5} = 5$ **c)** $10^{-\lg 5} = 10^{\lg(5^{-1})} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$,

vagy: $10^{-\lg 5} = \frac{1}{10^{\lg 5}} = \frac{1}{5}$ **d)** $4^{\log_2(3)} = (2^2)^{\log_2(3)} = 2^{2\cdot\log_2(3)} = 2^{\log_2(3^2)} = 2^{\log_2(9)} = 9$,

vagy: $4^{\log_2(3)} = (2^2)^{\log_2(3)} = 2^{(\log_2(3))\cdot 2} = \left(2^{\log_2(3)}\right)^2 = (3)^2 = 9$

Exponenciális és logaritmusos egyenletek

5. a) $x = \frac{5}{6}$ **b)** $x = \frac{1}{2}$ **c)** $x = -2$ **d)** $x = 3$ **e)** $x_1 = -2,\ x_2 = 1$ **f)** $x = \log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} = \frac{\lg 5}{\lg 2} \approx 2.32193$

6. a) $x_1 = 0,\ x_2 = 2$ **b)** $x = 1$ **c)** $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \log_4 3 = \frac{\ln 3}{\ln 4} = \frac{\lg 3}{\lg 4} \approx 0.792481$

7. a) $x = 45$ **b)** $x = 100$ **c)** $x = 6$ **d)** $x = 0$ **e)** $x_1 = 10, x_2 = 1000$

Exponenciális és logaritmusos egyenlőtlenségek

8. a) $-1 < x \leq 4$ **b)** $x \leq -2$ **c)** $x \leq \frac{1}{2}$ **d)** $x < -1$ vagy $x > 3$ **e)** $x > -4$ **f)** $x < \frac{1}{4}$

9. a) $\frac{1}{100} < x < 1000$ **b)** $3 < x < 4$ **c)** $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{3}{2} < x < 2$ **e)** $0 < x < 1$ vagy $x > e$