Matematika MC, 1. előadás

Halmazok. Elsőfokú és másodfokú függvény. Polinomok. Törtes egyenlőtlenségek.

Halmazok

Logikai jelek

Jelölések:	$\forall$: minden	$\neg$: nem
	$\exists$: létezik, van olyan	$\Longrightarrow$: következik
	$\wedge$: és	$\Longleftrightarrow$: ekvivalens
	$\vee$: vagy	

Definíció

Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk **egyenlőnek**, ha elemeik ugyanazok.

Például: $\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 1, 2\} = \{1, 2, 2, 1, 2, 1\}$

A halmazt, amelynek nincs eleme, **üres halmaznak** nevezzük. Jele: $\emptyset$.
Az "x dolog eleme az A halmaznak" jelölése: $x \in A$.
Az "x dolog nem eleme az A halmaznak" jelölése: $x \notin A$.

Az A halmazt a B halmaz **részhalmazának** nevezzük ($A \subseteq B$), ha az A minden eleme B-nek is eleme. Az A halmaz **valódi része** a B-nek ($A \subset B$), ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.

Halmazokról mindig csak mint egy adott **alaphalmaz** részhalmazairól beszélünk, még ha ezt az alaphalmazt nem is nevezzük meg.

Halmazok megadása: $\left\{ x \in \text{alaphalmaz} \;\middle|\; \text{feltételek } x\text{-re} \right\}$

Példa: Az 1-nél kisebb pozitív valós számok halmaza: $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$,
azaz azon x valós számok halmaza, melyekre $0 < x < 1$.

Műveletek halmazokkal

Unió vagy egyesítés: Az A és B halmaz uniója azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikben benne vannak.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Metszet vagy közös rész: Az A és B halmaz metszete azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek mindkét halmazban benne vannak.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

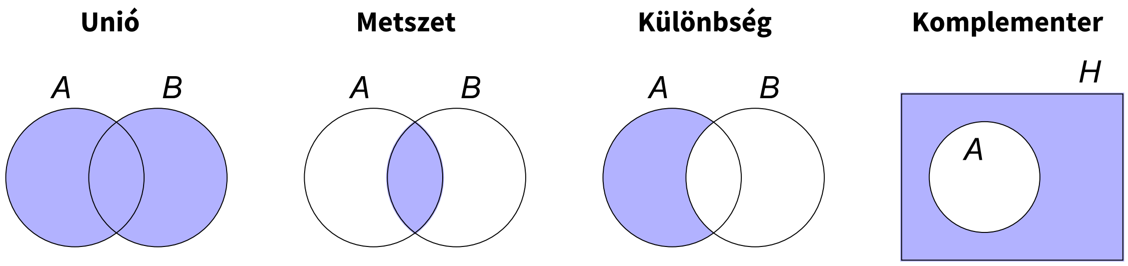
Különbség: Az A és B halmaz $A \setminus B$ különbsége az A összes olyan elemének a halmaza, amelyek nincsenek benne B-ben.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \;\wedge\; x \notin B\}$$

Komplementer: Az A halmaz H-ra vonatkozó komplementere a $H \setminus A$ halmaz, jele: $\overline{A}_H$.
Ha az alaphalmaz nincs megnevezve, a komplementert $\overline{A}$ jelöli.

$$\overline{A}_H = \{x \in H \mid x \notin A\}, \quad \text{illetve} \quad \overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

Azt mondjuk, hogy az A és B halmaz **diszjunkt**, ha $A \cap B = \emptyset$.



Jelölések

Valós számok halmaza: $\mathbb{R}$
Pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$
Nemnegatív valós számok halmaza: $\mathbb{R}_0^+$
Természetes számok halmaza: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
Megjegyzés: van, ahol az $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ definíció szerepel, ez csak megállapodás kérdése.

Egész számok halmaza: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Pozitív egészek halmaza: $\mathbb{N}^+$ vagy $\mathbb{Z}^+$.

Racionális számok halmaza: $\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ és } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \text{ melyre } x = \frac{k}{n}\right\}$,
azaz azon valós számok halmaza, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként.
Nem racionális (irracionális) szám pl. $\sqrt{2} \approx 1.41421\ldots$, $\pi \approx 3.14159\ldots$, $e \approx 2.71828\ldots$.

Intervallumok

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ (zárt intervallum)
$[a, b[= [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ (balról zárt, jobbról nyílt intervallum)
$]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ (balról nyílt, jobbról zárt intervallum)
$]a, b[= (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (nyílt intervallum)

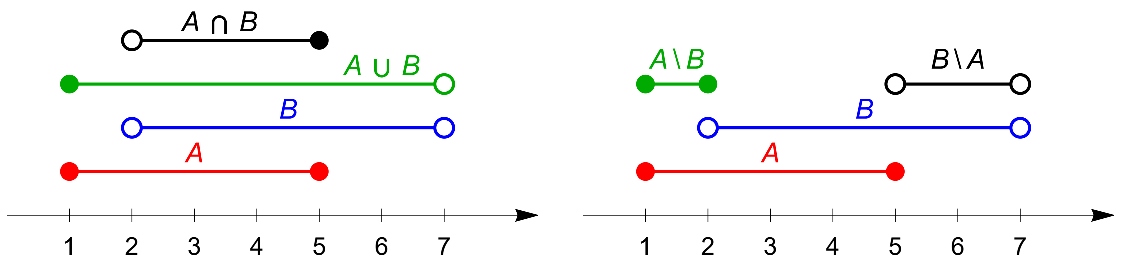
$]a, +\infty[= (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
$]-\infty; b] = (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$

Példa

Legyen $A = [1, 5]$ és $B = (2, 7)$ $\Longrightarrow$ $A \cup B = [1, 7)$ $\quad A \setminus B = [1, 2]$

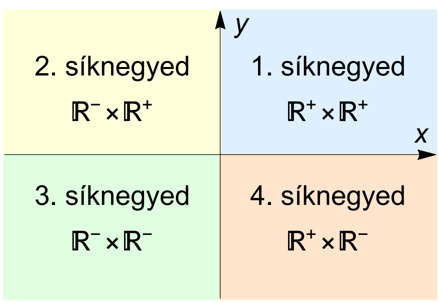
$A \cap B = (2, 5]$ $\quad B \setminus A = (5, 7)$



Descartes-szorzat

Az (a, b) rendezett pár 1. eleme a, 2. eleme b. A sorrend számít: $(a, b) \neq (b, a)$.
Megjegyzés: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$
Descartes-szorzat: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ és } b \in B\}$

Példák:
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$: a sík pontjainak halmaza vagy a valós számpárok halmaza
- $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, illetve $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$: az 1. síknegyed pontjai (a tengelyek nem tartoznak bele, illetve a tengelyek is beletartoznak)



Nevezetes azonosságok

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$
3. $(a - b)\,(a + b) = a^2 - b^2$
4. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,a\,b + 2\,a\,c + 2\,b\,c$
5. $(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$
6. $(a - b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$
7. $a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - a\,b + b^2\right)$
8. $a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + a\,b + b^2\right)$

Elsőfokú függvény

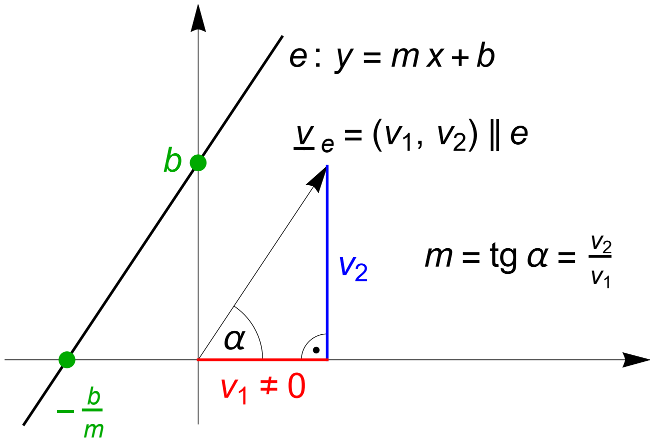
Grafikon

Az $f(x) = m\,x + b$ vagy $y = m\,x + b$ ($m \neq 0$) **elsőfokú vagy lineáris függvény** grafikonja egyenes.

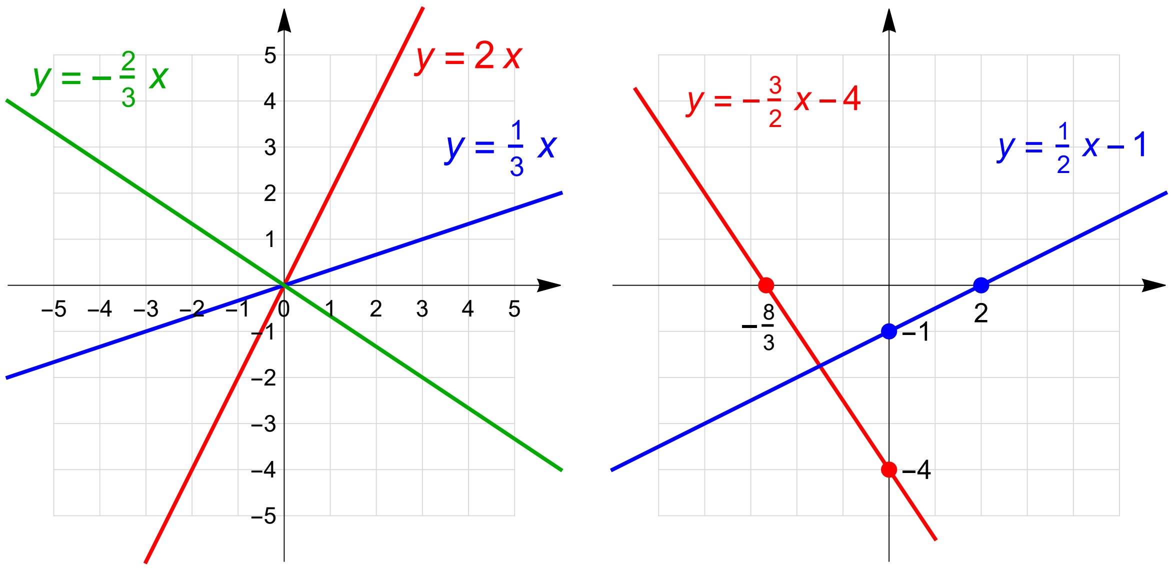
Meredekség: m

Tengelymetszetek: • ha $x = 0$, akkor $y = b$ az y-tengelymetszet

• ha $y = 0$, akkor $m\,x + b = 0 \Longrightarrow x = -\frac{b}{m}$ az x-tengelymetszet



Példák



Megjegyzés

- Ha az egyenes meredeksége $m = 0$, akkor az $f(x) = b$ (vagy $y = b$) **konstans függvény**, grafikonja párhuzamos az x tengellyel.

- Ha az egyenes párhuzamos az y tengellyel ($\alpha = 90\,°$, így nincs meredeksége), akkor egyenlete $x = a$ alakú (nem függvény grafikonja).

Másodfokú egyenlet

Kanonikus alak: $a x^2 + b x + c = 0$, ahol $a \neq 0$

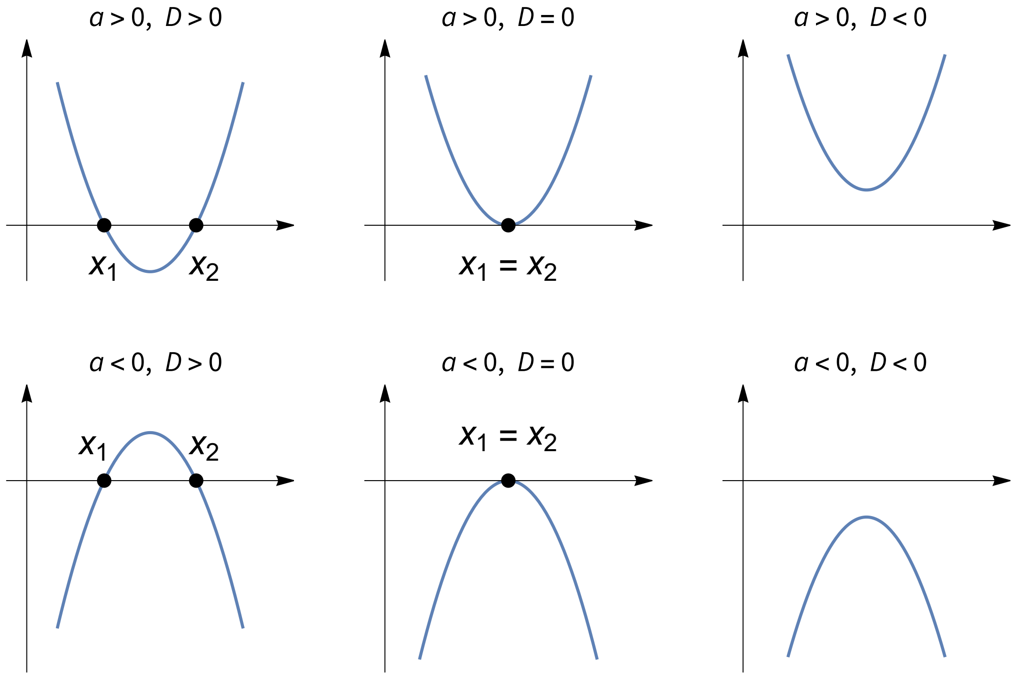
Gyöktényezős alak: $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Diszkrimináns: $D = b^2 - 4 a c$

Megoldóképlet: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$

A gyökök száma:
Ha $D > 0$: két különböző valós gyök.
Ha $D = 0$: egy(kétszeres) valós gyök.
Ha $D < 0$: nincs valós gyök (két komplex gyök).

Az $f(x) = a x^2 + b x + c$ $(a \neq 0)$ másodfokú függvény grafikonja az a főegyüttható és a D diszkrimináns előjelétől függően:



Gyökök és együtthatók közötti összefüggések:

$$a x^2 + b x + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 - (x_1 + x_2) x + x_1 x_2\right) \implies x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Szélsőérték meghatározása teljes négyzetté alakítással:

$$f(x) = a x^2 + b x + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a} x\right) + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2 a}\right)^2 - \frac{b^2}{4 a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2 a}\right)^2 - \frac{b^2}{4 a} + c$$

$\implies$ f-nek szélsőértéke van az $x = -\dfrac{b}{2 a} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ helyen, ami $a > 0$ esetén minimum, $a < 0$ esetén maximum.

Polinomok

Definíció

- Ha $n \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $a_n \neq 0$, akkor a $\boldsymbol{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$ függvényt ***n*-edfokú (valós együtthatós) polinom**nak nevezzük.

- A polinom együtthatói: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$
- A polinom főegyütthatója: a_n
- Ha nem tesszük fel, hogy $a_n \neq 0$, akkor a polinom legfeljebb n-edfokú.
- A konstans függvényeket nulladfokú polinomnak nevezzük.

- A $p(x)$ **polinom gyöké**nek nevezzük a zérushelyeit, azaz azon $x \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre $p(x) = 0$.
- A $p(x)$ n-edfokú polinom **fokszáma**: $\deg p(x) = n$.

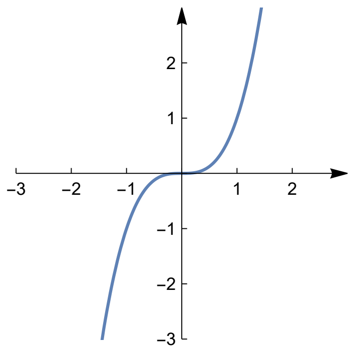
Példák

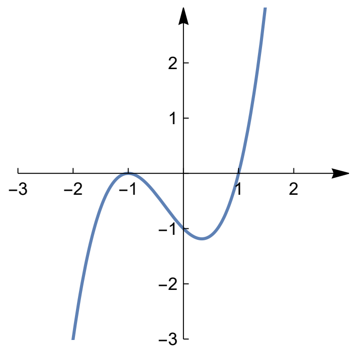
- Konstans polinom pl. $p(x) = 2$, grafikonja vízszintes egyenes
- Elsőfokú polinom pl. $p(x) = 2x + 3$, grafikonja ferde egyenes
- Másodfokú polinom pl. $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$, grafikonja parabola
- Harmadfokú polinomok pl.

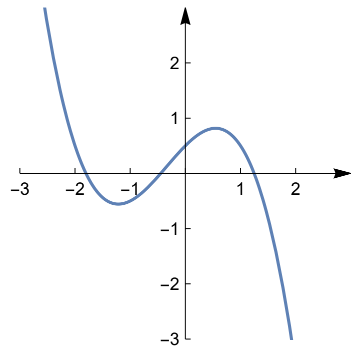
1) $p_1(x) = x^3$

2) $p_2 = (x+1)^2 (x-1) = x^3 + x^2 - x - 1$

3) $p_3(x) = -0.5x^3 - 0.5x^2 + x + 0.5$





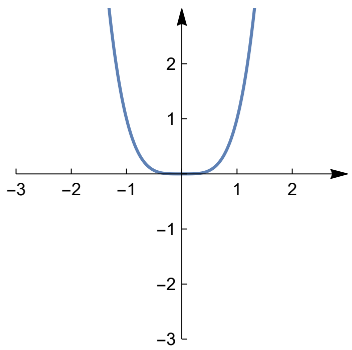


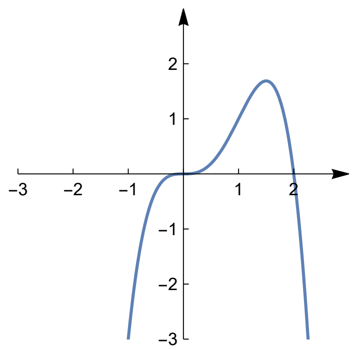
- Negyedfokú polinomok pl.

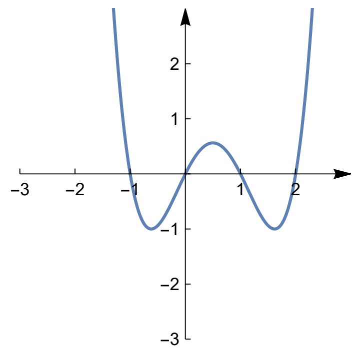
4) $p_4(x) = x^4$

5) $p_5 = -x^3(x-2) = -x^4 + 2x^3$

6) $p_6(x) = x(x-1)(x+1)(x-2) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$







Feladatok

Másodfokú függvény

1. Írjuk fel és ábrázoljuk azt a másodfokú függvényt, melynek főegyütthatója a, gyökei x_1, x_2. Határozzuk meg a függvény előjelét, valamint legnagyobb, illetve legkisebb értékét.

a) $a = 1,\ x_1 = -1,\quad x_2 = 5$ **b)** $a = -1,\ x_1 = -2,\quad x_2 = 2$

2. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán. Az a)-e) esetben ábrázoljuk az egyenlet bal oldalán látható másodfokú függvényt, határozzuk meg az előjelét, valamint legnagyobb, illetve legkisebb értékét.

a) $x^2 + x - 12 = 0$ **b)** $-x^2 + 6x - 9 = 0$ **c)** $2x^2 + 5x + 4 = 0$ **d)** $2x^2 - 1 = 0$

e) $x^2 + 4x = 0$ **f)** $x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 0$ **g)** $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$

3. Határozzuk meg az alábbi függvények legnagyobb, illetve legkisebb értékét.
Az a)-f) esetben ábrázoljuk a függvényeket.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 4$ **b)** $f(x) = x^2 + 6x + 11$

c) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ **d)** $f(x) = -x^2 + 6x - 14$

e) $f(x) = 2x^2 - 6x - 5$ **f)** $f(x) = 3x^2 + 8x + 10$

g) $f(x) = -4x^2 + 2x + 7$ **h)** $f(x) = -6x^2 - 2x + 1$

i) $f(x) = 5x^2 - 20x - 3$ **j)** $f(x) = -2x^2 - 20x - 35$

Törtes egyenlőtlenségek

Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

4. a) $\dfrac{2x+5}{x-3} < 4$ **b)** $\dfrac{3x+2}{5-x} \geq 1$ **c)** $\dfrac{2}{x-1} \geq \dfrac{3}{1-x} - 4$

5. a) $\dfrac{x^2+2x-15}{x+6} < 0$ **b)** $\dfrac{-x^2+2x-15}{x+6} \leq 0$ **c)** $2x - \dfrac{3}{x-1} \geq 3$

d) $\dfrac{x}{x-1} \geq \dfrac{2}{x+4}$ **e)** $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-5x-6} \geq 0$ **f)** $2 - \dfrac{x-1}{x} < \dfrac{x}{x+1}$

Eredmények

Másodfokú függvény

1. feladat

a) Az $f(x) = (x - (-1))\,(x - 5) = (x + 1)\,(x - 5)$ függvény főegyütthatója pozitív, grafikonja felfelé nyíló parabola, amely két pontban, $x_1 = -1$-ben és $x_2 = 5$-ben metszi az x tengelyt. A függvény előjele:

- $f(x) < 0 \iff -1 < x < 5$
- $f(x) > 0 \iff x < -1$ vagy $x > 5$

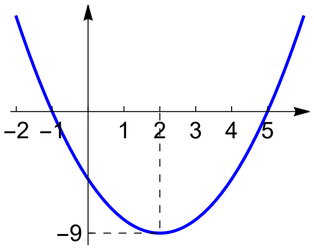
f-nek minimuma van az $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2$ helyen, és a minimum értéke $f(2) = -9$.

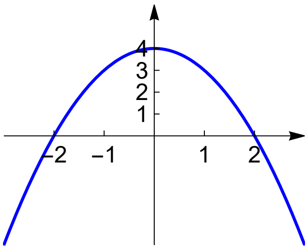
b) Az $f(x) = -(x - (-2))\,(x - 2) = -(x + 2)\,(x - 2)$ függvény főegyütthatója negatív, grafikonja lefelé nyíló parabola, amely két pontban, $x_1 = -2$-ben és $x_2 = 2$-ben metszi az x tengelyt. A függvény előjele:

- $f(x) < 0 \iff x < -2$ vagy $x > 2$
- $f(x) > 0 \iff -2 < x < 2$

f-nek maximuma van az $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + 2}{2} = 0$ helyen, és a maximum értéke $f(0) = 4$.

1. a) $f(x) = (x + 1)\,(x - 5)$ **b)** $f(x) = -(x - 2)\,(x + 2)$





2. a) $x^2 + x - 12 = 0$

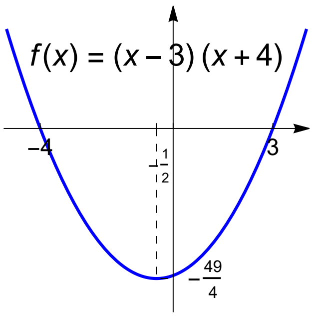
A diszkrimináns: $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49 > 0 \implies$ két különböző valós gyök van.

A megoldóképletből a gyökök: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \implies x_1 = 3,\ \ x_2 = -4$

Az $f(x) = x^2 + x - 12 = (x - 3)\,(x + 4)$ függvény főegyütthatója pozitív, grafikonja felfelé nyíló parabola, amely két pontban, $x_1 = 3$-ban és $x_2 = -4$-ben metszi az x tengelyt. A függvény előjele:

- $f(x) < 0 \iff -4 < x < 3$
- $f(x) > 0 \iff x < -4$ vagy $x > 3$

A függvénynek minimuma van $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4 + 3}{2} = -\frac{1}{2}$-ben, a minimum értéke $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{49}{4}$.



2. b) $-x^2+6x-9=0$

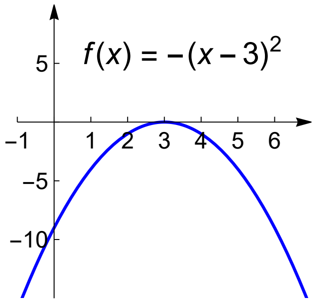
A diszkriminíns: $D=6^2-4\cdot(-1)\cdot(-9)=36-36=0 \implies$ egy (kétszeres) valós gyök van.

A megoldóképletből a gyökök: $x_{1,2}=\dfrac{-6\pm 0}{-2}=3$

Az $f(x)=-x^2+6x-9=-(x-3)^2$ függvény főegyütthatója negatív, grafikonja lefelé nyíló parabola, amely egy pontban, $x=3$-ban érinti az x tengelyt. A függvény előjele:

- $f(x)<0 \iff x<3$ vagy $x>3 \iff x\neq 3$

A függvénynek maximuma van $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{3+3}{2}=3$-ban, a maximum értéke $f(3)=0$.



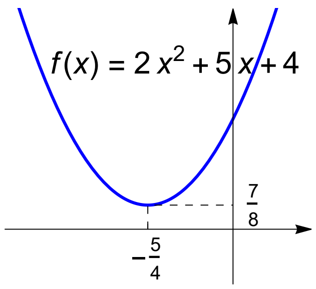
2. c) $2x^2+5x+4=0$

A diszkriminíns: $D=5^2-4\cdot 2\cdot 4=-7<0 \implies$ nincs valós gyök.
Az $f(x)=2x^2+5x+4$ függvény főegyütthatója pozitív, grafikonja felfelé nyíló parabola, amely nem érinti x tengelyt. A függvény előjele:

- $f(x)>0$ minden $x\in\mathbb{R}$ esetén

A függvénynek minimuma van $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{5}{2\cdot 2}=-\dfrac{5}{4}$-ben, a minimum értéke $f\left(-\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{7}{8}$.
A képlet akkor is érvényes, ha nincs valós gyök (két komplex gyök van).

A szélsőérték meghatározása teljes négyzetté alakítással:
$$f(x)=2x^2+5x+4=2\left(x^2+\frac{5}{2}x+2\right)=2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2+2\right)=2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\right)=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$$
$\implies$ f-nek minimuma van $x=-\dfrac{5}{4}$-ben, és a minimum értéke $f\left(-\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{7}{8}$.



2. d) $2x^2-1=0$

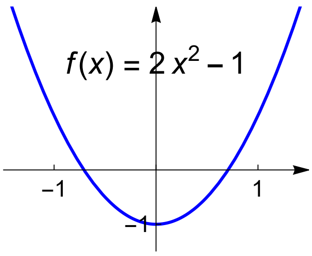
Az egyenlet hiányos másodfokú egyenlet, így nincs szükség megoldóképletre.

$2x^2-1=0 \iff x^2=\dfrac{1}{2} \iff x_{1,2}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\approx\pm 0.707107.$

Az $f(x) = 2x^2 - 1$ függvény főegyütthatója pozitív, grafikonja felfelé nyíló parabola, amely két pontban, x_1-ben és x_2-ben metszi az x tengelyt. A függvény előjele:

- $f(x) < 0 \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $f(x) > 0 \iff x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$

A függvénynek minimuma van $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0$-ban, és a minimum értéke $f(0) = -1$.

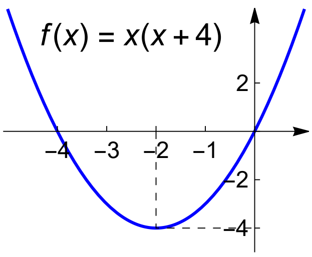


2. e) $x^2 + 4x = 0$

Az egyenlet hiányos másodfokú egyenlet, így nincs szükség megoldóképletre. Emeljünk ki x-et:
$x^2 + 4x = x(x + 4) = 0 \iff x_1 = -4, x_2 = 0$.
Az $f(x) = x(x + 4)$ függvény főegyütthatója pozitív, grafikonja felfelé nyíló parabola, amely két pontban, $x_1 = -4$-ben és $x_2 = 0$-ban metszi az x tengelyt. A függvény előjele:

- $f(x) < 0 \iff -4 < x < 0$
- $f(x) > 0 \iff x < -4$ vagy $x > 0$

A függvénynek minimuma van $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4 + 0}{2} = -2$-ben, a minimum értéke $f(-2) = -4$.



2. f) $x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 0$

Emeljünk ki minden tagból x^2-et: $x^2(x^2 + 5x - 6) = x^2(x - 1)(x + 6) = 0$
$\Longrightarrow$ a gyökök: $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -6$.

2. g) $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$

Vezessük be az $y = x^2 \geq 0$ új változót, ekkor y-ra másodfokú egyenletet kapunk: $4y^2 - 3y - 1 = 0$

A gyökök: $y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{8} = \frac{3 \pm 5}{8} \Longrightarrow y_1 = 1, y_2 = -\frac{1}{4}$

Az eredeti egyenlet gyökei:

1. eset: $x^2 = 1 \iff x_{1,2} = \pm 1$

2. eset: $x^2 = -\frac{1}{4}$, ez azonban nem lehet, mivel $x^2 \geq 0$.

Így a megoldás: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

3. feladat

Szélsőérték meghatározása:

1. módszer: Emeljük ki a főegyütthatót, majd az $(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$ vagy $(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$ azonosság segítségével alakítsunk teljes négyzetté.

2. módszer: Az $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ $(a \neq 0)$ függvénynek szélsőértéke van az $x = -\frac{b}{2\,a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ helyen, ami $a > 0$ esetén minimum, $a < 0$ esetén maximum.

a) $f(x) = (x-1)^2 - 5$, így f-nek minimuma van $x = 1$-nél, és a minimum értéke $f(1) = -5$.

b) $f(x) = (x+3)^2 + 2$, így f-nek minimuma van $x = -3$-nél, és a minimum értéke $f(-3) = 2$.

c) $f(x) = -(x-2)^2 + 1$, így f-nek maximuma van $x = 2$-nél, és a maximum értéke $f(2) = 1$.

d) $f(x) = -(x-3)^2 - 5$, így f-nek maximuma van $x = 3$-nál, és a maximum értéke $f(3) = -5$.

e) $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{19}{2}$, így f-nek minimuma van $x = \frac{3}{2}$-nél, és a minimum értéke $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{19}{2}$.

f) $f(x) = 3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}$, így f-nek minimuma van $x = -\frac{4}{3}$-nál, és a minimum értéke $f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{14}{3}$.

g) $f(x) = -4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{29}{4}$, így f-nek maximuma van $x = \frac{1}{4}$-nél, és a maximum értéke $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{29}{4}$.

h) $f(x) = -6\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{7}{6}$, így f-nek maximuma van $x = -\frac{1}{6}$-nál, és a maximum értéke $f\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6}$.

i) $f(x) = 5\,(x-2)^2 - 23$, így f-nek minimuma van $x = 2$-nél, és a minimum értéke $f(2) = -23$.

j) $f(x) = -2\,(x+5)^2 + 15$, így f-nek maximuma van $x = -5$-nél, és a maximum értéke $f(-5) = 15$.

Törtes egyenlőtlenségek

A megoldás menete:

1) az egyenlőtlenséget 0-ra rendezzük

2) közös nevezőre hozunk

3) a számlálóban és a nevezőben meghatározzuk a gyököket, illetve szorzattá alakítunk (ha lehet)

4) meghatározzuk a számláló és nevező előjelét, ezt célszerű közös számegyenesen ábrázolni

5) meghatározzuk a tört előjelét

a) tört $> 0 \iff \frac{\textbf{pozitív}}{\textbf{pozitív}}$ vagy $\frac{\textbf{negatív}}{\textbf{negatív}}$ alakú

b) tört $< 0 \iff \frac{\textbf{pozitív}}{\textbf{negatív}}$ vagy $\frac{\textbf{negatív}}{\textbf{pozitív}}$ alakú

c) tört $= 0 \iff$ számláló $= 0$

6) az egyenlőtlenség megoldása a megfelelő intervallumok metszete lesz

4. feladat

a) $x < 3$ vagy $x > \frac{17}{2}$ **b)** $\frac{3}{4} \leq x < 5$ **c)** $x \leq -\frac{1}{4}$ vagy $x > 1$

5. feladat

a) $x < -6$ vagy $-5 < x < 3$ **b)** $x > -6$ **c)** $0 \leq x < 1$ vagy $x \geq \frac{5}{2}$ **d)** $x < -4$ vagy $x > 1$

e) $x < -1$ vagy $2 \leq x \leq 3$ vagy $x > 6$ **f)** $x < -1$ vagy $-\frac{1}{2} < x < 0$