Függvénysorok

Hatványsor konvergenciasugara: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$
Taylor-formula:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}, \qquad \xi \in (x_0, x) \text{ vagy } \xi \in (x, x_0)$$

Néhány függvény Maclaurin-sora:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \ -1 < x \le 1$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \operatorname{arth}(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ |x| < 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad \text{ahol } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \text{(binomiális sor)}$$

Fourier-sorok. A $2p$ szerint periódikus f függvény Fourier-sora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p} \right), \text{ ahol}$$

$$a_0 = \frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(x)dx, \qquad b_0 = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, \qquad b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}dx.$$

Komplex függvények

$e^{iz} = \cos z + i\sin z$ (Euler-formula),
$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \operatorname{ch} iz$, $i\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = \operatorname{sh} iz$, $\cos iz = \operatorname{ch} z$, $\sin iz = i\operatorname{sh} z$
$z = re^{i\varphi}$ esetén $\ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$,
$u_x = v_y,\ u_y = -v_x$ (Cauchy–Riemann-féle differenciálegyenletek)
$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Laplace-féle differenciálegyenletek)
$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{G}} \frac{f(z)}{z-z_0}dz,\ f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\mathcal{G}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ (Cauchy integrálformulák)
$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, ahol $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{G}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$ (Laurent-sor)
$\operatorname*{Res}_{z_0} f = c_{-1}$ (reziduum)

elsőrendű pólushelyen $\operatorname*{Res}_{z_0} f = \lim_{z_0}(z-z_0)f(z)$

k-adrendű pólushelyen: $\operatorname*{Res}_{z_0} f = \dfrac{1}{(k-1)!}\lim_{z_0}\left((z-z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)}$.

Laplace transzformáció

függvény	Laplace-transzformált	Megjegyzések
$f(t)$	$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$	– definíció
$af(t)+bg(t)$	$aF(p)+bG(p)$	– linearitás
$f'(t)$	$pF(p)-f(+0)$	– a függvény
$f''(t)$	$p^2F(p)-pf(+0)-f'(+0)$	deriváltjai
$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p)-p^{n-1}f(+0)-$ $p^{n-2}f'(+0)-\ldots-f^{(n-1)}(+0)$	$(f(+0)=\lim_{+0} f)$
$\int_0^t f(s)\,ds$	$\frac{1}{p}F(p)$	– a függvény integrálja
$tf(t)$	$-F'(p)$	– a L-transzformált
$t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(p)$	deriváltjai
$\frac{1}{t}f(t)$	$\lim_{\operatorname{Re} z\to\infty}\int_p^z F$	– a L-transzf. integrálja
$f(t-a)H(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$	– a függvény eltolása
$e^{at}f(t)$	$F(p-a)$	– a L-transzf. eltolása
$f(\frac{t}{a})$	$aF(ap)$	– hasonlóság
$(f*g)(t)$	$F(p)G(p)$	– konvolúció
$f(t)=f(t+h)$	$\dfrac{1}{1-e^{-hp}}\int_0^h e^{-pt}f(t)\,dt$	– periódikus függvények

ahol H az egységugrás függvény, azaz $H(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x<0\\ 1, & \text{ha } x\geq 0\end{cases}$,

továbbá $(f*g)(t)=\int_0^t f(s)g(t-s)\,ds$.

$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$	$F(p)$
1	$\frac{1}{p}$	t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$ $(n\in\mathbf{N})$	t^v	$\frac{\Gamma(v+1)}{p^{v+1}}$ $(v>-1)$
$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$\frac{t^n}{n!}e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^{n+1}}$ $(n\in\mathbf{N})$
$\sin bt$	$\frac{b}{p^2+b^2}$	$\cos bt$	$\frac{p}{p^2+b^2}$
$\operatorname{sh} bt$	$\frac{b}{p^2-b^2}$	$\operatorname{ch} bt$	$\frac{p}{p^2-b^2}$
$t\sin bt$	$\frac{2bp}{(p^2+b^2)^2}$	$t\cos bt$	$\frac{p^2-b^2}{(p^2+b^2)^2}$
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$	$e^{at}\cos bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$