NÉV: ______________________________ NEPTUN KÓD: ____________

Matematika A3k **Minta vizsga** *2023. xx. xx.*

I. rész. *Ebben a részben minden helyes válasz* 3 *pontot ér. Indokolni csak akkor kell, ha a feladat ezt kéri. A választ a keretbe írjuk!*

1. Adja meg a $z = (-1)^i$ komplex szám főértékét!

$z = e^{-\pi}$

2. Adja meg a $z = e^{(1+7\pi i)}$ komplex szám algebrai alakját!

$z = -e$

3. Írja le, egy $f(z)$ komplex függvény z_0 pontbeli differenciálhatóságának és folytonosságának kapcsolatáról tanult tételt!

Ha egy $f(z)$ komplex függvény differenciálható egy z_0 pontban, akkor $f(z)$ folytonos is z_0-ban.

4. Milyen kapcsolat van az $u(x, y)$ és $v(x, y)$ függvények között a (x_0, y_0) pontban, ha az $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ komplex függvény differenciálható a $z_0 = x_0+iy_0$ pontban.

$\frac{u'_x(x_0,y_0)=v'_y(x_0,y_0)}{u'_y(x_0,y_0)=-v'_x(x_0,y_0)}$

5. Számítsa ki az $\oint z^{2023}dz$ integrált a $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ csúcspontú háromszög mentén!

$\oint z^{2023}dz = 0$

6. Fogalmazza meg egy $f(z)$ komplex függvények G görbementi integrálhatóságának definícióját!

Akkor mondjuk, hogy egy korlátos $f(z)$ komplex függvény integrálható D_f egy rektifikálható, irányított G görbeívén, ha a G bármely minden határon túl finomodó beosztássorozatához tartozó integrálközelítő összegek sorozata konvergens a beosztások és a reprezentánsrendszerek választásától függetlenül.

7. Adja meg az $f(z) = \frac{e^z}{z-\pi i}$ függvénynek a komplex számsík origó középpontú 5π sugarú körén vett integrálját, ha a görbe irányítása negatív!

Az integrál $= 2\pi i$

8. Mondja ki a "Függvények deriváltjának Laplace-transzformáltja" néven ismert tételt!

Ha az $f(t)$ egyváltozós valós függvénynek a $(0, \infty)$ intervallumon korlátos és folytonos deriváltja van, akkor $L\{f'; p\} = pL\{f; p\} - \lim_{t\to+0} f(t)$.

9. Adja meg az $f(t) = te^t$ függvény Laplace-transzformáltját!

$\mathcal{L}(te^t) = \frac{-1}{(p-1)^2}$

10. Adja meg az $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)}$ komplex függvény inverz Laplace-transzformáltját!

$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = e^{2t} - e^t$

11. Mikor mondjuk, hogy egy m-változós valós f függvény az R^m tér egy D részhalmazán eleget tesz az i-dik változójában a Lipschitz-feltételnek.

Ha megadható olyan N_i nemnegatív valós szám, hogy D tetszőleges $P' = (x_1, \ldots, x_i', \ldots x_m)$ és $P'' = (x_1, \ldots, x_i'', \ldots x_m)$ pontjaira $|f(P') - f(P'')| \leq N_i |x_i' - x_i''|$ teljesül.

12. Döntse el, hogy az alábbi differenciálegyenletek közül melyek szétválasztható változójúak!
A: $y' = \sin(x+y) - \cos x \sin y$
B: $\frac{y'}{y} = e^x$
C: $y' = x + y$

A, B

13. Adja meg az $y' = xy,\ y(0) = 2$ Taylor-típusú kezdeti érték problémának a megoldását!

$y(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}}$

14. Döntse el, hogy az alábbi differenciálegyenletek közül melyek egzaktak!
A: $e^{x+y} + e^{x-y}y' = 0$
B: $2xe(x^2+y) + y'e(x^2+y) = 0$
C: $x^2 + y^2 y' = 0$

B, C

15. Döntse el, hogy az $e^x + e^{x-y}y' = 0$ differenciálegyenlettel kapcsolatos alábbi állítások közül melyek igazak!
A: A differenciálegyenletnek van csak x-től függő multiplikátora.
B: A differenciálegyenletnek van csak y-től függő multiplikátora.

A, B

16. Számítsa ki az $f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2$ függvények $W(x)$ Wronski-determinánsát!

W(x)= $(x^2 - 2x + 2)e^x$

17. Döntse el, hogy az alábbi függvényrendszerek közül melyik az $y^{(3)} + y' = 0$ differenciálegyenlet alaprendszere!
A: $1,\ e^x,\ e^{-x}$
B: $x,\ \sin x,\ \cos x$
C: $1,\ \sin x,\ \cos x$

C

18. Definiálja az egzakt differenciálegyenlet fogalmát!

A $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ differenciálegyenletet egzakt differenciálegyenletnek nevezzük, ha megadható olyan $u(x,y)$ kétváltozós valós függvény, amelyre $u'_x(x,y) = P(x,y)$ és $u'_y(x,y) = Q(x,y)$ teljesülnek.

19. Adja meg a $y'' + 4y' + 4y = 0$ differenciálegyenlet alaprendszerét!

$e^{-2x}, \; xe^{-2x}$

20. Adja meg az $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$ d.e. egy $y_p(x)$ partikuláris megoldását!

$y_p(x) = e^{3x}$

21. Definiálja n elem k-adosztályú ismétlés nélküli variációjának fogalmát!

Az egymástól páronként különböző $a_1, \ldots, a_n$ elemekből képezhető olyan k elemű sorozatokat, amelyekben az elemek mindegyike legfeljebb egyszer fordul elő, az adott n elem k-adosztályú ismétlés nélküli variációinak nevezzük.

22. Adja meg annak a ξ valószínűségi változónak az $M(\xi)$ várható értékét, amely az $x_1 = 18$, $x_2 = -1$, $x_3 = 6$ értékeket veszik fel, és $P(\xi = 18) = \frac{1}{9}$, $P(\xi = -1) = \frac{1}{3}$, $P(\xi = 6) = \frac{5}{9}$!

$M(\xi) = 5$

23. Mondja ki a Bayes-tételt!

Ha egy valószínűségi algebrában a pozitív valószínűségű $B_1, \ldots, B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor a valószínűségi algebrához tartozó tetszőleges pozitív valószínűségű A eseményre $P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$ teljesül.

24. Definiálja a diszkrét valószínűségi változó fogalmát!

Az ξ valószínűségi változót diszkrét valószínűségi változónak nevezünk, ha értékkészlete vagy egy véges sorozat, vagy egy olyan végtelen sorozat, melynek egyetlen pontja sem torlódási pontja ennek a sorozatnak.

25. Fejezze ki egy folytonos ξ valószínűségi változó x_0 pontban differenciálható $F_\xi(x)$ eloszlásfüggvényének x_0 pontbeli differenciálhányadosát az $f_\xi(x)$ sűrűségfüggvénnyel!

$F'_\xi(x_0) = f_\xi(x_0)$

<u>II. rész.</u> *Ebben a részben (a dolgozat hátlapján) tételeket kell ismertetni és bizonyítani.*

A. Vezesse le az $f(t) = e^{at}$ függvény Laplace-transzformáltját! (11 *pont*)

B. Mondja ki és bizonyítsa be a teljes valószínűség tételét! (14 *pont*)