9. gyakorlat

Határozzuk meg az alábbi függvénysorok D értelmezési tartományát, K konvergenciatartományát és $s(x)$ összegfüggvényét!

(1/16) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{(1+z)^n}$

Megoldás: A függvénysor D értelmezési tartománya $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. A függvénysor konvergens a $z = 0$ pontban, mert a behelyettesítésével keletkezett számsor összege 0. Tegyük fel, hogy $z \neq 0$. A függvénysor

$$z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+z)^n}$$

alakban is írható. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+z)^n}$$

sor egy $\frac{1}{1+z}$ kvóciensű mértani sor. Ez akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\left| \frac{1}{1+z} \right| < 1,$$

azaz

$$|1+z| > 1.$$

Tehát a mértani sor konvergenciatartománya mindazon z komplex számok halmaza, amelyek a -1 középpontú 1 sugarú körön kívül helyezkednek el. A mértani sor összegfüggvénye:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1+z}} = \frac{1}{\frac{1+z-1}{1+z}} = \frac{1+z}{z}.$$

Így az eredeti függvénysor konvergenciatartománya a -1 középpontú körön kívül levő komplex számok halmaza, hozzávéve a 0 komplex számot. A függvénysor összegfüggvénye:

$$s(x) = \begin{cases} 1+z, & ha \quad |z+1| > 1 \\ 0, & ha \quad z = 0. \end{cases}$$

(1/17) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$

Megoldás: A függvénysor D értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. A függvénysor $\frac{x-1}{x+1}$ kvóciensű mértani sor. Így a sor akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1,$$

azaz

$$|x-1| < |x+1|.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek eleget tevő valós számok a $(0, \infty)$ intervallumban helyezkednek el. Így $K = (0, \infty)$.

A sor összegfüggvénye:

$$s(x) = \frac{\frac{x-1}{x+1}}{1 - \frac{x-1}{x+1}} = \frac{1}{2}(x-1).$$

(1/18) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{n+1}}{(x-1)^n}$

Megoldás: A függvénysor D értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. A sor a következő alakba írható:

$$(x+1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n.$$

A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$$

sor $\frac{x+1}{x-1}$ kvóciensű mértani sor. Ez akkor és csak akkor konvergens, ha x a $(-\infty, 0)$ intervallumban helyezkedik el. Tehát a vizsgált sor konvergenciatartománya: $K = (-\infty, 0)$. A sor összegfüggvénye

$$s(x) = (x+1)\frac{1}{1 - \frac{x+1}{x-1}} = \frac{1-x^2}{2}.$$

(1/23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(n+1)}$

Megoldás: A függvénysor értelmezési tartománya a komplex számok halmaza.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n} - \frac{z}{n+1} \right).$$

Így tetszőleges z komplex szám esetén a k-dik részletösszeg

$$s_k(z) = z - \frac{z}{2} + \frac{z}{2} - \frac{z}{3} + \cdots + \frac{z}{k-1} - \frac{z}{k} + \frac{z}{k} - \frac{z}{k+1} = z - \frac{z}{k+1}.$$

Tehát

$$\lim_{k\to\infty} s_k(z) = z.$$

Így a sor összegfüggvénye:

$$s(z) = z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

(1/25) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln\ x}{(x+n)(x+n+1)}$

Megoldás: A függvénysor értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza. Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln\ x}{(x+n)(x+n+1)} = ln\ x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)},$$

és

$$\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1},$$

ezért

$$s(x) = \lim_{k\to\infty} s_k(x) = \lim_{k\to\infty} ln\ x \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+k+1} \right) = \frac{ln\ x}{x+1}.$$

(1/26) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x+n)(x+n+1)}$

Megoldás: A függvénysor értelmezési tartománya és konvergenciatartománya: $K = D = \{\mathbb{R}, x \neq 0, -1, -2, \dots\}$. Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x+n)(x+n+1)} = \frac{\sin x}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} =$$

$$= \frac{\sin x}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right),$$

ezért

$$s(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin x}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+k+1} \right) = \frac{\sin x}{x^2}.$$

Számítsuk ki az alábbi valós változós hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciatartományát!

(2/63) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$

Megoldás:

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n^2 2^n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 2 = 2.$$

Így a $(-1, 3)$ intervallum belső pontjai konvergenciapontok.

Az $x_0 = -1$ pont behelyettesítésével keletkezett számsor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}.$$

Ez a számsor Leibniz-sor, ezért konvergens.

Az $x_0 = 3$ pont behelyettesítésével keletkezett számsor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ez a számsor konvergens.

Tehát a konvergenciatartomány:

$$[-1, 3]$$

(2/64) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2} x^n$

Megoldás: Mivel

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n! 2^{n+1}}{(n+1)! 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0,$$

ezért a hatványsor csak a 0 pontban konvergens.

(2/65) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n x^n$

Megoldás: Mivel

$$\varrho=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}}=1,$$

ezért a hatványsor konvergens a $(-1,1)$ intervallum pontjaiban.

Az $x_0=-1$ pont behelyettesítésével keletkezett számsor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ez a számsor divergens, mert

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\infty.$$

Az $x_0=1$ pont behelyettesítésével keletkezett számsor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ez a számsor divergens, mert

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\infty.$$

(2/71) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{n}(x+1)^n$

Megoldás: Mivel

$$\varrho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(3^n+2^n)(n+1)}{(3^{n+1}+2^{n+1})n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{3},$$

ezért a hatványsor konvergens a $(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$ intervallum pontjaiban.

Az $x_0 = -\frac{4}{3}$ pont behelyettesítésével keletkezett számsor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n + 2^n}{n} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}.$$

Ez a számsor Leibniz-sor, ezért konvergens.

Az $x_0 = -\frac{2}{3}$ pont behelyettesítésével keletkezett számsor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{n} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}.$$

Ezt a számsort minorálja a divergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

számsor, ezért a számsor is divergens. Tehát a függvénysor konvergenciatartománya a $[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ intervallum.

Határozzuk meg az alábbi hatványsorok összegfüggvényét és konvergenciatartományát!

(3/85) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

Megoldás: A vizsgált sor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2}$$

sor tagonkénti integrálásával keletkezett sor. Ezen utóbbi sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|x| < 1$. Ebben az esetben

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^2)n - 1 = \frac{1}{1-x^2}.$$

Ezért a $(-1, 1)$ intervallumban az eredeti sor is konvergens. Ha $S(x)$ jelöli az $s(x)$ összegfüggvény egy primitív függvényét, azaz

$$S(x) = \int s(x)dx = \int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}ln\ \frac{1+x}{1-x},$$

ezért minden $x \in (-1, 1)$ pontban

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = S(x) - S(0) = S(x) = \frac{1}{2} ln \ \frac{1+x}{1-x}.$$

A vizsgált sor az $|x| > 1$ helyeken divergens, ugyanis, ha konvergens lenne, akkor a tagonkénti deriválásával adódó

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2}$$

sor is konvergens lenne, ami nem igaz. A

Az $x_0 = -1$ behelyettesítésével keletkezett számsor:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

Ezt a számsor divergens, mivel a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

számsor divergens, ugyanis ezt a számsort minorálja az

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

számsor.

Hasonlóan igazolható, hogy az $x_0 = 1$ pont behelyettesítésével keletkezett számsor is divergens. Így a koncergenciatartomány a $(-1, 1)$ intervallum.

(3/86) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$

Megoldás: A sor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}$$

sorból kapjuk kétszeres deriválással. Így

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

A konvergenciatartomány a $(-1, 1)$ intervallum.

Írjuk fel a következő $f(x)$ függvények Maclaurin-sorát és állapítsuk meg, hogy ez a sor mely intervallumban állítja elő a függvényt!

(4/101) $f(x) = a^x,\ a > 0$

Megoldás:

$$a^x = e^{xln\ a} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xln\ a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{ln^n a}{n!}x^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

(4/102) $f(x) = e^{-x^2}$

Megoldás:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n},\ x \in \mathbb{R}.$$

(4/103) $f(x) = \sin(x+2)$

Megoldás: A függvény $x = -2$ pont körüli Taylor sora:

$$\sin(x+2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x+2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n},\ x \in \mathbb{R}.$$

Nekünk most a Maclaurin sorra van szükség, ezért a függvényt átalakítjuk:

$$f(x) = \sin(x+2) = \sin x \cos 2 + \cos x \sin 2.$$

Mivel

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

és

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

ezért

$$\sin(x+2) = \cos 2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sin 2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{x \cos 2}{2n+1} + \sin 2 \right) x^{2n}, \ x \in \mathbb{R}.$$

(4/104) $f(x) = e^{x^2+1}$

Megoldás: Mivel

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

ezért

$$e^{x^2+1} = ee^{x^2} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} x^{2n}.$$

(4/105) $f(x) = chx$

Megoldás: Mivel

$$chx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

ezért

$$chx = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

(4/107) $f(x) = xln(x+1)$

Megoldás: