8. gyakorlat

A majoránskritérium, illetve a minoránskritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi számsorok konvergensek-e, vagy divergensek!

(1/39) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

Megoldás: Mivel

$$\frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

és a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sor konvergens, ezért a majoránskritérium szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

sor is konvergens.

(1/40) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

Megoldás: Mivel

$$\frac{n^2}{n^3+1} \geq \frac{n^2}{n^3+n^3} = \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n}$$

és a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

sor divergens, ezért a minoránskritérium szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$$

sor is divergens.

(1/41) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-16}{n^5+n}$

Megoldás: Mivel $n \geq 2$ esetén

$$\frac{2n^3-16}{n^5+n} \leq \frac{2n^3}{n^5} = \frac{2}{n^2}$$

és a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

sor konvergens, ezért a majoránskritérium szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-16}{n^5+n}$$

sor is konvergens.

(1/42) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{2n^2-n}$

Megoldás: Mivel

$$\frac{3n+2}{2n^2-n} \geq \frac{3n}{2n^2} \geq \frac{3n}{3n^2} = \frac{1}{n}$$

és a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

sor divergens, ezért a minoránskritérium szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{2n^2-n}$$

sor is divergens.

(1/43) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos\frac{n}{2})^{4n}}{n^n+1}$

Megoldás: A sor tagjai nem negatívak. Mivel

$$\frac{(\cos\frac{n}{2})^{4n}}{n^n+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$$

és a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sor konvergens, ezért a majoránskritérium szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos \frac{n}{2})^{4n}}{n^n + 1}$$

sor is konvergens.

(1/44) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$

Megoldás: Mivel

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n} \geq \frac{\sqrt{n+1}}{n} = \frac{\sqrt{n+1}}{n}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{n+1}{n\sqrt{n+1}} \geq$$

$$\geq \frac{n}{n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$$

és a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

sor divergens, ezért a minoránskritérium szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$$

sor is divergens.

(1/45) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}$

Megoldás: Mivel

$$\frac{2^n+4^n}{3^n+5^n} \leq \frac{4^n+4^n}{5^n} = 2\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

és a

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

mértani sor konvergens, ezért a majoránskritérium szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 4^n}{3^n + 5^n}$$

sor is konvergens.

(1/46) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^5+1}}$

Megoldás: Mivel

$$\sqrt{\frac{n}{n^5+1}} \leq \sqrt{\frac{n}{n^5}} = \sqrt{\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{n^2}$$

és a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sor konvergens, ezért a majoránskritérium szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^5+1}}$$

sor is konvergens.

A hányadoskritérium, vagy a gyökkritérium segítségével döntse el, hogy az alábbi számsorok konvergensek-e!

(2/57) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(lnn)^n}$

Megoldás: A gyökkritériumot használjuk. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(lnn)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{lnn} = 0 < 1,$$

ezért a gyökkritérium szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(lnn)^n}$$

sor konvergens.

(2/58) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

Megoldás: A gyökkritériumot használjuk. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

ezért a gyökkritérium szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$$

sor konvergens.

(2/59) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

Megoldás: A gyökkritériumot használjuk. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} < 1,$$

ezért a gyökkritérium szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

sor konvergens.

(2/60) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e-1}\right)^n$

Megoldás: A hányadoskritériumot használjuk. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{e-1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e-1}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{(e-1)^n}{(e-1)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{e-1} = \frac{e}{e-1} > 1,$$

ezért a hányadoskritérium szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e-1} \right)^n$$

sor divergens.

(2/61) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2^n} \right)^n$

Megoldás: A gyökkritériumot használjuk. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2^n} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2^n}.$$

A L'hospital-szabály alkalmazásával könnyen igazolható, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{2^x} = 0.$$

Ezért

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2^n} = 0 < 1.$$

A gyökkritérium szerint ebből az következik, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2^n} \right)^n$$

sor konvergens.

(2/62) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

Megoldás: A hányadoskritériumot használjuk. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n\to\infty} 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{2}{e} < 1,$$

ezért a hányadoskritérium szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

sor konvergens.

(2/63) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$

Megoldás: A hányadoskritériumot használjuk. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}+1}}{\frac{n!}{2^n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(2^{n+1}+1)} \frac{(2^n+1)}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) \frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}} = \infty,$$

ezért a hányadoskritérium szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$$

sor divergens.

(2/64) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

Megoldás: A gyökkritériumot használjuk. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^{(n-1)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{(n-1)}} = \frac{1}{e^2} < 1,$$

ezért a gyökkritérium szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

sor konvergens.

(2/65) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} arctgn\right)^n$

Megoldás: A gyökkritériumot használjuk. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\pi} arctgn\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} arctgn = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

ezért a gyökkritérium szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} arctgn\right)^n$$

sor konvergens.

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi valós számsorok közül melyek abszolút konvergensek, feltételesen konvergensek, illetve divergensek!

(3/86) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}$

Megoldás: Megmutatjuk, hogy a sor abszolút konvergens. Minden pozitív n-re

$$\left|\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}\right| = \frac{|\sin n|}{\sqrt[3]{n^4}} \leq \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Így a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}\right|$$

nemnegatív tagú sort majorálja a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$$

sor. Mivel $\frac{4}{3} > 1$, ezért a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$$

sor konvergens. A majoránskritérium szerint ekkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}} \right|$$

sor konvergens, azaz az eredeti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}$$

sor abszolút konvergens.

(3/87) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ ln\ n}$

Megoldás: Megmutatjuk, hogy a sor feltételesen konvergens. Mivel a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ ln\ n}$$

sor váltakozó előjelű, és a sor tagjainak abszolút értékéből képezett

$$\frac{1}{n\ ln\ n}$$

sorozat monoton csökkenve 0-hoz konvergál, ezért a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ ln\ n}$$

sor Leibniz-sor, és ezért konvergens. Megvizsgáljuk, hogy a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ ln\ n}$$

sor abszolút konvergens-e. Ehhez a tagok abszolút értékéből álló

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ ln\ n}$$

sort kell vizsgálni. Mivel ez a sor nemnegatív tagokat tartalmaz, ezért alkalmazhatjuk az integrálkritériumot. Mivel

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ ln\ x} dx = \int_2^{\infty} \frac{\frac{1}{x}}{ln\ x} dx = \lim_{b \to \infty} [ln\ ln\ x]_2^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}(ln\ ln\ b - ln\ ln\ 2) = \infty,$$

ezért a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ ln\ n}$$

sor divergens. Így a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ ln\ n}$$

sor nem abszolút konvergens. Mivel konvergens, de nem abszolút konvergens, ezért feltételesen konvergens.

(3/88) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$

Megoldás: Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n^2]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} = 1,$$

ezért a vizsgált

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$$

sor

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$$

tagjainak sorozata nem konvergál 0-hoz. Ezért a vizsgált sor divergens, mert konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor esetén az a_n sorozatnak 0-hoz kell konvergálni.

(3/89) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n} - 1)^{2n}$

Megoldás: A sor tagjai nem negatívak, ezért a konvergencia és abszolút konvergenci egyszerre teljesül. Így a sor vagy konvergens (és ekkor abszolút konvergens) vagy divergens. A feltételes konvergencia szóba sem jöhet, mert ahhoz az kellene, hogy konvergens legyen, de ne legyen abszolút kenvergens. Nemnegatív tagú soroknál pedig ez nem lehet. Alkalmazzuk a gyökkritériumot. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\sqrt[n]{n} - 1)^{2n}} = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 = 0 < 1,$$

ezért a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^{2n}$$

sor konvergens és (az előbbiek alapján) abszolút konvergens.

(3/90) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos n)^n}{n^n+1}$

Megoldás: Minden pozitív egész n-re

$$\left|\frac{(\cos n)^n}{n^n+1}\right| = \frac{|\cos n|^n}{n^n+1} \leq \frac{1}{n^n+1} \leq \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Így a konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

sor majorálja a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(\cos n)^n}{n^n+1}\right|$$

sort, amely emiatt konvergens. Ez pedig azt jelenti, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos n)^n}{n^n+1}$$

sor abszolút konvergens, és emiatt konvergens is.

(3/91) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{4^n}$

Megoldás: Mivel a sor tagjainak abszolút értékéből álló sor a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

konvergens mértani sor, ezért a vizsgált

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{4^n}$$

sor abszolút konvergens. Ezért konvergens is.