7. gyakorlat

Közvetlenül a deficíció alapján bizonyítsuk be, hogy az alábbi számsorok konvergensek, és határozzuk meg a sorok s összegét!

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$

Megoldás: Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{6}\right)^n + \left(\frac{3}{6}\right)^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{6}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^n,$$

ezért a sor konvergens, és összege a két konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{6}\right)^n \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^n$$

mértani sor összege, azaz

$$s = \frac{\frac{2}{6}}{1-\frac{2}{6}} + \frac{\frac{3}{6}}{1-\frac{3}{6}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{10^{2n+1}} + \frac{2}{10^{2n+2}}\right)$

Megoldás: Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{10^{2n+1}} + \frac{2}{10^{2n+2}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{10}\left(\frac{1}{100}\right)^n + \frac{2}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^n\right) =$$

$$= \frac{52}{100} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n = \frac{52}{100} \, \frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{13}{2475}.$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n$, $(a > 0)$.

Megoldás: Mivel $0 < \frac{a}{a+1} < 1$, ezért a sor konvergens (mértani sor, $\frac{a}{a+1}$ kvócienssel). Így a sor összege

$$s = \frac{\frac{a}{a+1}}{1-\frac{a}{a+1}} = a.$$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$

Megoldás: A sor mértani sor $\frac{1+i}{2}$ kvócienssel. Mivel

$$0 \leq \left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{|1+i|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

ezért a mértani sor konvergens, és összege

$$s = \frac{1}{1-\frac{1+i}{2}} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+i.$$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Megoldás: Mivel

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right),$$

ezért a sor k-dik részletösszege

$$s_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{2k+3}{k^2+3k+2}\right).$$

Így

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{2k+3}{k^2+3k+2}\right) = \frac{3}{4}.$$

(10) $\sum_{n=1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

Megoldás: Elemi törtekre való bontással

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Így a sor k-dik részletösszege

$$s_k = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Tehát a sor összege

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = 1.$$

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2}$

Megoldás: Mivel

$$\frac{1}{9n^2-3n-2} = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right),$$

ezért a sor k-dik részletösszege

$$s_k = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \cdots + \frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3k+1}\right).$$

Tehát a sor összge

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3k+1}\right) = \frac{1}{3}.$$

(12) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+(2i+1)n+i-1}$

Megoldás: Mivel

$$\frac{1}{n^2+(2i+1)n+i-1} = \frac{1}{n+i} - \frac{1}{n+i+1},$$

ezért a sor k-dik részletösszege

$$s_k = \frac{1}{i} - \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+i} - \frac{1}{2+i} + \cdots + \frac{1}{k-1+i} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1+i} =$$

$$= -i - \frac{1}{k+1+i}.$$

Tehát a sor összege

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left(-i - \frac{1}{k+1+i}\right) = -i.$$

Bizonyítsuk be, hogy a következő sorok divergensek!

(23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$, $(0 < |a| \leq 1)$

Megoldás: Mivel

$$\frac{n}{|a|^n} \geq 1$$

minden n-re, ezért

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} \neq 0.$$

Ebből viszont már következik, hogy a sor divergens.

(24) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$

Megoldás: Mivel

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3},$$

ezért a sor divergens.

(25) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Megoldás: A vizsgált sor divergenciájának igazolásához megmutatjuk, hogy nem teljesül rá a Cauchy-féle konvergenciakritérium. Tetszőleges n és p pozitív egész számokra

$$|s_{n+1} + \cdots + s_{n+p}| = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n+p)(n+p+1)}} \geq$$

$$\geq \frac{p}{\sqrt{(n+p)(n+p+1)}}.$$

Mivel

$$\lim_{p\to\infty} \frac{p}{\sqrt{(n+p)(n+p+1)}} = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(\frac{n}{p}+1)(\frac{n}{p}+1+\frac{1}{p})}} = 1,$$

ezért nem teljesül a Cauchy-féle konvergenciakritérium. Tehát a sor divergens.

(26) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

Megoldás: A vizsgált sor divergenciájának igazolásához itt is azt mutatjuk meg, hogy nem teljesül rá a Cauchy-féle konvergenciakritérium. Tetszőleges n és p pozitív egész számokra

$$|s_{n+1}+\cdots+s_{n+p}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n+p+1}} \geq$$

$$\geq \frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n+p+1}}.$$

Mivel

$$\lim_{p\to\infty} \frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n+p+1}} = \lim_{p\to\infty} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{(\frac{n}{p}+1)}+\sqrt{(\frac{n}{p}+1+\frac{1}{p})}} = \infty,$$

ezért nem teljesül a Cauchy-féle konvergenciakritérium. Tehát a sor divergens.

Döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek vagy divergensek!

(31) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

Megoldás: Mivel a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^n$$

határérték nem létezik, ezért a sor divergens.

(32) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$

Megoldás: Tetszőleges n és p pozitív egész számok esetén

$$|s_{n+1}+\cdots+s_{n+p}| = \frac{n+1}{(n+1)^2+2}+\frac{n+2}{(n+2)^2+2}+\cdots+\frac{n+p}{(n+p)^2+2} \geq$$

$$\geq \frac{n+1}{(n+1)^2+n+1}+\frac{n+2}{(n+2)^2+n+2}+\cdots+\frac{n+p}{(n+p)^2+n+p} =$$

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+p+1} \geq \frac{p}{n+p+1}.$$

Mivel

$$\lim_{p\to\infty} \frac{p}{n+p+1} = 1,$$

ezért a vizsgált számsor (a Cauchy-féle konvergenciakritérium miatt) divergens.

(33) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^k}$ $(a > 1,\ k \in \mathbb{N})$

Megoldás: Ha $k = 0$, akkor a sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n$$

alakú, amely egy $a > 1$ kvóciensű mértani sor; ez pedig divergens. Tegyük fel, hogy $k \geq 1$. Megmutatható, hogy az $\frac{a^n}{n^k}$ sorozat végtelenhez divergál, és emiatt a sor divergens. Annak igazolásához, hogy az $\frac{a^n}{n^k}$ sorozat végtelenhez divergál, elegendő megmutatni, hogy az $\frac{n^k}{a^n}$ sorozat nullához konvergál. Az $\frac{n^k}{a^n}$ sorozat alulról korlátos, mert

$$\frac{n^k}{a^n} \geq 0.$$

Megmutatjuk, hogy az $\frac{n^k}{a^n}$ sorozat monoton csökkenő. Mivel $a > 1$, ezért $\sqrt[k]{a} > 1$, és ezért $\frac{1}{\sqrt[k]{a}-1} < n$, és így $a > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$, amiből

$$\frac{n^k}{a^n} > \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}$$

következik. Tehát az alulról korlátos $\frac{n^k}{a^n}$ sorozat monoton csökkenő. Ezért konvergens is. Legyen

$$b = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n}.$$

Akkor

$$b = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^k}{a^{2n}} = \lim_{n\to\infty} 2^k \left(\frac{1}{a}\right)^n \frac{n^k}{a^n} = 2^k \cdot 0 \cdot b = 0.$$

Emiatt az eredmény miatt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty.$$

A fentieknek megfelelően, a vizsgált sor divergens.

(34) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^{n+a}-1}$ $(a \in \mathbb{R}^+)$

Megoldás: Mivel

$$\frac{5^n}{5^{n+a}-1} > \frac{5^n}{5^{n+a}} = \frac{1}{5^a},$$

ezért az $a_n = \frac{5^n}{5^{n+a}-1}$ sorozat nem lehet nullasorozat. Így a vizsgált sor divergens.

(35) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{n2^n}$

Megoldás: Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2+i)^n}{n2^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{5})^n}{n2^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n}{n} = \infty,$$

használva az (33) feladatot is az $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$ és $k = 1$ esetre. Emiatt a vizsgált sor divergens.

(36) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n}+in}$

Megoldás: Mivel

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{\sqrt{n}+in} \right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\sqrt{n+n^2} = 1,$$

ezért a vizsgált sor divergens.

(37) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$, $(x \in \mathbb{R})$

Megoldás:

$$\left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}}.$$

Ez megegyezik a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergens sorhoz tartozó

$$|s_{n+1} + \cdots + s_{n+p}|$$

összeggel. Így a vizsgált sor is konvergens.

(38) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}$

Megoldás:

$$\left| \frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\cos x^(n+p)}{(n+p)^2} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}.$$

Ez megegyezik a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens sorhoz tartozó

$$|s_{n+1} + \cdots + s_{n+p}|$$

összeggel. Így a vizsgált sor is konvergens.