6. gyakorlat

(4/a) Egy $\mathbf{A}$ mátrixot ortogonálisnak nevezünk, ha $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. Mutassuk meg, hogy ortogonális mátrix determinánsa $+1$ vagy -1.

Megoldás. Ha $\mathbf{A}$ ortogonális mátrix, akkor a determinánsok szorzástétele alapján

$$1 = |\mathbf{E}| = |\mathbf{A}\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|^2,$$

amelyből $|\mathbf{A}| = 1$ vagy $|\mathbf{A}| = -1$ következik.

(4/b) Mutassuk meg, hogy tetszőleges 1 determinánsú 2×2-típusú ortogonális mátrix mindig felírható

$$\begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{bmatrix}$$

alakban.

Megoldás. Ha a vizsgált mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

alakú, akkor az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & bc + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix}.$$

Ennek, valamint az $1 = |\mathbf{A}| = ad - bc$ egyenlőség alapján

$$a^2 + c^2 = 1,\ b^2 + d^2 = 1,\ ad - bc = 1,\ ab + cd = 0.$$

Az első két egyenlőség alapján a $(-\pi, \pi]$ intervallumban vannak olyan α and φ számok, melyekre $a = cos\alpha$, $c = sin\alpha$, $b = sin\varphi$, $d = cos\varphi$. A harmadik egyenlőség alapján

$$1 = ad - bc = cos\alpha cos\varphi - sin\alpha sin\varphi = cos(\alpha + \varphi).$$

A negyedik egyenlőség alapján

$$0 = ab + cd = cos\alpha sin\varphi + sin\alpha cos\varphi = sin(\alpha + \varphi).$$

Tehát

$$cos(\alpha + \varphi) = 1 \text{ és } sin(\alpha + \varphi) = 0.$$

Ez úgy lehet, hogy $\alpha = \varphi = \pi$ vagy $\alpha + \varphi = 0$, azaz $\alpha = -\varphi$. Az első esetben

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ettől eltérő esetben csak a második eset fordulhat elő, azaz $\alpha + \varphi = 0$, amiből $\alpha = -\varphi$ adódik. Ebből már következik a bizonyítandó állítás, azaz a vizsgált mátrix

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(-\varphi) & sin(-\varphi) \\ sin\varphi & cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{bmatrix}.$$

(5) Az egyenletrenszer mátrixának rangja, vagy - ha létezik - a determinánsa alapján döntse el, hogy a következő homogén lineáris egyenletrendszereknek van-e nemtriviális megoldása!

(5/a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszer mátrixának determinánsa

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 84,$$

ezért az egyenletrendszernek csak triviális megoldása van.

(5/b)

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & +5x_5 & = 0 \\ -x_1 & +x_2 & & -6x_4 & +x_5 & = 0 \\ & 3x_2 & +x_3 & +5x_4 & -x_5 & = 0 \\ & & 2x_3 & -7x_4 & +6x_5 & = 0 \end{array}$$

Az egyenletrendszer mátrixára

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & 6 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel ennek a mátrixnak a sorai és az első négy oszlopa által meghatározott

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

negyedrendű aldeterminánsa nem nulla (egy felső háromszögmátrix determinánsáról van szó, ezért a determináns értéke megegyezik a főátlóban álló elemek szorzatával, 6-tal), ezért a mátrix rangja 4. Mivel ez kisebb az ismeretlenek számánál, azért a homogén lineáris egyenletrendszernek van nem triviális megoldása.

(5/c)

$$\begin{array}{lllll} 3x_1 & +4x_2 & -5x_3 & +7x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = 0 \\ 4x_1 & +11x_2 & -13x_3 & +16x_4 & = 0 \\ 7x_1 & -2x_2 & +x_3 & +3x_4 & = 0 \end{array}$$

Az egyenletrendszer mátrixának determinánsára

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & 17 & -19 & 20 \\ 0 & -51 & 57 & -60 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Mivel ez a determináns nulla, ezért a homogén lineáris egyenletrendszer mátrixának rangja kisebb 4-nél, ami miatt az egynletrendszernek van nem triviális megoldása.

(6) Állapítsuk meg, hogy a paraméterek milyen valós értékére

- nincs megoldása,
- van egy és csak egy megoldása,
- végtelen sok megoldása van

a következő lineáris egyenletrendszereknek.

(5/a)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + ux_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 9x_2 - 5x_3 &= v \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixának és kibővített mátrixának rangját egyszerre vizsgáljuk.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & u & 2 & 2 \\ 1 & 9 & -5 & v \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 1 \\ 7 & u+10 & 0 & 4 \\ -14 & -16 & 0 & v-5 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 7 & u+10 & 0 & 4 \\ -14 & -16 & 0 & v-5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 7 & u+10 & 0 & 4 \\ 0 & 2u+4 & 0 & v+3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2u+4 & 0 & v+3 \end{array}\right].$$

Ebből már látszik, hogy ha $u \neq -2$, akkor az egyenletrendszer mátrixának és kibővített mátrixának rangja egyenlő 3-mal, és ekkor az egynletrendszernek van egy és csak egy megoldása. Ha $u = -2$ és $v \neq -3$, akkor az egyenletrendszer mátrixának rangja

2, a kibővített mátrixé 3, ezért ebben az esetben az egyenletrenszernek nincs megoldás. Ha $u = -2$ és $v = -3$, akkor az egyenletrendszer mátrixának és kibővített mátrixának is 2 a rangja, és ezért az egyenletrendszernek van megoldása, ráadásul végtelen sok.

(8) Adja meg az $\mathbb{R}^2$, illetve az $\mathbb{R}^3$ vektortér olyan ortonormáltbázisait, amelyek az alábbi szimmetrikus mátrixok sajátvektoraiból állnak! Adja meg a mátrixok alakját a sajátvektoraiból álló ortonormált bázisban!

(8/93)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$$

A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 - 14\lambda + 24 = 0$, melynek gyökei 2 és 12. A 2 sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} y \quad (y \neq 0).$$

Mivel az $\mathbf{A}$ matrix szimmetrikus, ezért a 12 sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} y \quad (y \neq 0).$$

A

$$\begin{bmatrix} -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

egységnyi hosszúságú sajátvektorokból álló ortonormált bázisban az $\mathbf{A}$ mátrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

alakú, mert szimmetrikus mátrix alakja a sajátvektoraiból álló ortonormált bázisban diagonális, és a főátlóban álló elemek a mátrix sajátértékei (felülről lefelé haladva, a sajátvektorok bázisbeli sorrendjének megfelelő elrendezésben).

(8/94)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A karakterisztikus egyenlet

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

azaz

$$\lambda^3 - 9\lambda = 0,$$

melynek gyökei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ és $\lambda_3 = -3$. A $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok a

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. A számolás részletezése nélkül, a sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} x, \quad (x \neq 0).$$

Ezekből válasszunk ki egy egységnyi hosszúságút:

$$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}.$$

A $\lambda_2 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok a

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. A számolás részletezése nélkül, a sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} x, \quad (x \neq 0).$$

Ezekből válasszunk ki egy egységnyi hosszúságút:

$$\underline{s}_2 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}.$$

Mivel a mátrix szimmetrikus, ezért a $\lambda_3 = -3$-hoz tartozó sajátvektorok merőlegesek a λ_1-hez és a λ_2-höz tartozó sajátvektorokra. Így $\underline{s}_3$ választható úgy, mint az $\underline{s}_1 \times \underline{s}_2$ vektori szorzat (ez merőleges $\underline{s}_1$-re és $\underline{s}_2$-re, valamint az is teljesül rá, hogy egységnyi hosszúságú). Tehát

$$\underline{s}_3 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{vmatrix} = 2/3\underline{i} - 1/3\underline{j} + 2/3\underline{k} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

A vizsgált $\mathbf{A}$ mátrix alakja az $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3$ ortonormált bázisban

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

mert a főátlóban az $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3$ sajátvektorokhoz tartozó sajátértékeknek kell állni.

(10/114) Határozzuk meg a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix legkisebb pozitív sajátértékéhez tartozó sajátvektorait! Döntsük el, hogy ezek sajátvektorai-e az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixnak!

A $\mathbf{B}$ mátrix sajátértékei $0, 1, 2$. Az 1-hez tartozó sajátvektorok:

$$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z, \quad (z \neq 0).$$

Mivel

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} z,$$

ezért $\underline{s}_1$ nem sajátértéke $\mathbf{A}$-nak.

(11/28) Az

$$A : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{bmatrix}$$

tenzor standard bázisbeli mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ennek rangja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

miatt 3, tehát a magtér dimenziója 0. Így a képtér, azaz az értékkészlet dimenziója 3. Tehát az A tenzor teljes.

!!!!! n-dimenziós A tenzor magterének dimenziója $n - rang(\mathbf{A})$!!!!!

!!!!! n-dimenziós A tenzor értékkészletének dimenziója $rang(\mathbf{A})$!!!!!

(13/36) Adjuk meg az A tenzor mátrixát (a standard bázisban), ha

$$A : \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A : \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Legyen az A mátrixa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Erre teljesülni kell, hogy

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mivel

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

ezért

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(15/70) Adja meg az A tenzor mátrixát az

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

bázisban, ha A a síkot tükrözi az $y = x$ egyenletű egyenesre.

Mivel $A(\underline{i}) = \underline{j}$ és $A(\underline{j}) = \underline{i}$, ezért az A mátrixa a standard bázisban:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Legyen annak a bázistranszformációnak a standard bázisbeli mátrixa $\mathbf{T}$, amely a standard bázis vektoraihoz rendre a szóban forgó bázis vektorait rendeli! Akkor

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

melynek inverze

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Így az A tenzor keresett mátrixa (az új bázisban):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$