13. gyakorlat

Egy V térbeli tartomány térfogata egyenlő az $f(x,y,z) = 1$ függvény V-n vett hármas integráljával. Ennek alkalmazásával számítsa ki az alábbi felületek által határolt V térbeli tartomány térfogatát!

(1/46) $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 2.$

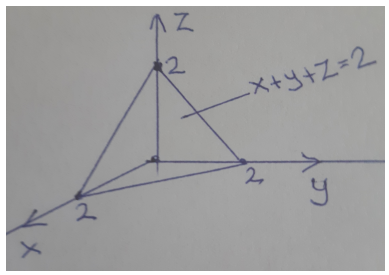

Figure 1: a V tartomány

Megoldás: Mivel

$$V = \{(x,y,z) : \ 0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le 2 - x, \ 0 \le z \le 2 - x - y,$$

ezért a V tartomány ΔV térfogata:

$$\Delta V = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} \left(\int_0^{2-x-y} 1 \ dz \right) dy \right) dx =$$

$$\int_0^2 \left(\int_0^{2-x} [z]_0^{2-x-y} \, dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} (2 - x - y) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left[2y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{2-x} dx = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x \right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

(1/47) $y = 0, y = 2, z = 0, z = 2 - 2x^2.$

Megoldás: Mivel

$$V = \{(x,y,z) : \ -1 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 2, \ 0 \le z \le 2 - 2x^2\},$$

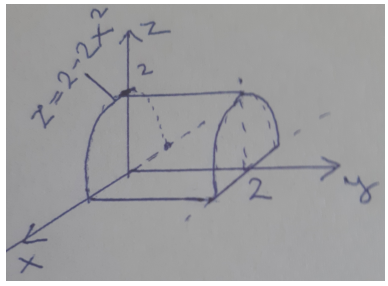

Figure 2: a V tartomány

ezért a V tartomány ΔV térfogata:

$$\Delta V = \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_0^{2-2x^2} 1 \; dz \right) dx \right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 [z]_0^{2-2x^2} \, dx \right) dy = \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 (2-2x^2) dx \right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left[2x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^1 dy = \int_0^2 \frac{8}{3} dy = \frac{8}{3} [y]_0^2 = \frac{16}{3}.$$

(1/48) $y = 0, \; y = x^2 - 4, \; z = 0, \; z = y + 8$. Mivel

$$V = \{(x, y, z) : \; -2 \le x \le 2, \; x^2 - 4 \le y \le 0, \; 0 \le z \le y + 8\},$$

ezért a V tartomány ΔV térfogata:

$$\Delta V = \int_{-2}^2 \left(\int_{x^2-4}^0 \left(\int_0^{y+8} 1 \; dz \right) dy \right) dx = \cdots = \frac{1024}{15}.$$

(1/49) $z = -x, \; z = x, \; y^2 = 2 - x$. Mivel

$$V = \{(x, y, z) : \; -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}, \; 0 \le y \le 2 - y^2, \; -x \le z \le x\},$$

ezért a V tartomány ΔV térfogata:

$$\Delta V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2-y^2} \left(\int_{-x}^x 1 \; dz \right) dy \right) dx = \cdots = \frac{64\sqrt{2}}{15}.$$

Számítsuk ki az alábbi felületekkel határolt V tartományon a megadott $f(x,y,z)$ függvény hármas integrálját!

(2/54) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ (a,b,c>0);\ f(x,y,z)=z.$

$$\int_V z dV = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} z\ dz \right) dy \right) dx = \cdots = \frac{abc^2}{24}.$$

(2/55) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a};\ f(x,y,z)=z.$

$$\int_V z dV = \int_0^a \left(\int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2} \left(\int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} z\ dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^a \left(\int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2} (\sqrt{a}-\sqrt{x}-\sqrt{y})^4 dy \right) dx =$$

$$= \int_0^a \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^6}{30} dx = \frac{a^4}{240}.$$

(2/56) $z=0,\ x^2+z=1,\ y^2+z=1;\ f(x,y,z)=z^2.$

$$\int_V z dV = 8 \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^{1-x^2} z^2\ dz \right) dy \right) dx = \cdots = \frac{1}{3}.$$

(85) Hengerkoordinátákra való áttéréssel számítsuk ki az alábbi hármas integrált

$$\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \left(\int_0^a z\sqrt{x^2+y^2} dz \right) dy \right).$$

Megoldás: A V tartomány, ahol integrálunk, egy olyan félhenger, melynek alaplapja az xy-síkbeli, 1 sugarú, $(1,0)$ középpontú felső félkör, tengelye párhuzamos a z-tengellyel és magassába a.

Alkalmazzuk az

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = m.$$

helyettesítést! A Jacobi-determináns abszolút értéke r. Így

$$\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \left(\int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dz \right) dy \right) dx =$$

$$\int_0^a \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\varphi} mr^2 dr \right) d\varphi \right) dm = \frac{8a^2}{9}.$$

(97) A térbeli polárkoordinátákra való áttéréssel számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dV,$$

ahol V a $z = x^2 + y^2 + z^2$ egyenletű felület által határolt tartomány.

Megoldás: A V tartomány az $\frac{1}{2}$ sugarú, $(0, 0, \frac{1}{2})$ középpontú gömb. Alkalmazzuk a térbeli polárkoordinátákra való áttérés módszerét:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta.$$

A Jacobi-determináns abszolút értéke $r^2\sin\theta$. Így

$$\int_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dV = \int_0^\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} r^3\sin\theta dr \right) d\varphi \right) d\theta = \frac{\pi}{10}.$$