11. gyakorlat

Állapítsuk meg, hogy vannak-e szélsőértékei az alábbi kétváltozós függvényeknek! Ha igen, akkor hol, és milyenek?

(1/52) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Megoldás:

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y \quad \text{és} \quad f'_y(x,y) = 3y^2 - 3x.$$

Az

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y = 0 \quad \text{és} \quad f'_y(x,y) = 3y^2 - 3x = 0$$

egyenletrendszer megoldásai: Az első egyenletből

$$y = x^2$$

adódik, így a második egyenlet

$$x^4 - x = 0,$$

melynek megoldásai

$$x_1 = 0 \quad \text{és} \quad x_2 = 1.$$

Így

$$y_1 = 0 \quad \text{és} \quad y_2 = 1.$$

Tehát a függvénynek a

$$P_1(0,0) \quad \text{és} \quad P_2(1,1)$$

pontokban lehet szélsőértéke. Képezzük a másodrendű parciális deriváltakat:

$$f''_{xx}(x,y) = 6x,\ f''_{xy}(x,y) = -3,\ f''_{yx}(x,y) = -3,\ f''_{yy}(x,y) = 6y.$$

Így a

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$$

determinánst kell vizsgálni. Mivel

$$D(0,0) = -9,$$

ezért a $P(0,0)$ pontban nincs szélsőértéke a függvénynek. Mivel

$$D(1,1) = 27,$$

ezért a $P(1,1)$ pontban a függvénynek van szélsőértéke. Mivel

$$f''_(1,1) = 6 > 0,$$

ezért a függvénynek minimuma van a $P(1,1)$ pontban.

(1/53) $f(x,y) = 4x^2 + 2xy - 5y^2 + 2$

Megoldás: Mivel

$$f'_x(x,y) = 8x + 2y, f'_y(x,y) = 2x - 10y,$$

ezért a függvénynek szélsőértéke lehet a $P(0,0)$ pontban. Mivel

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & -10 \end{vmatrix},$$

ezért $D(0,0) = -84 < 0$. Így a függvénynek nincs szélsőértéke a $P(0,0)$ pontban.

(1/54) $f(x,y) = 4x^2 + 2xy + 5y^2 + 2$

Megoldás: Mivel

$$f'_x(x,y) = 8x + 2y, f'_y(x,y) = 2x + 10y,$$

ezért a függvénynek szélsőértéke lehet a $P(0,0)$ pontban. Mivel

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix},$$

ezért $D(0,0) = 76 > 0$. Így a függvénynek szélsőértéke van a $P(0,0)$ pontban. Mivel $f''(0,0) = 8 > 0$, ezért a függvénynek minimuma van a $P(0,0)$ pontban.

(1/55) $-4x^2 + 2xy - 5y^2 + 2$

Megoldás: A függvénynek szélsőértéke lehet a $P(0,0)$ pontban. Mivel $D(0,0) = 76 > 0$, ezért a függvénynek szélsőértéke van a $P(0,0)$ pontban. Mivel $f''(0,0) = -8 < 0$, ezért a függvénynek maximuma van a $P(0,0)$ pontban.

(1/57) $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

Megoldás:

$$f'_x(x,y) = 3x^2 + 3y \quad \text{és} \quad f'_y(x,y) = 3y^2 + 3x.$$

Az

$$f'_x(x,y) = 3x^2 + 3y = 0 \quad \text{és} \quad f'_y(x,y) = 3y^2 + 3x = 0$$

egyenletrendszer megoldásai: Az első egyenletből

$$y = -x^2$$

adódik, így a második egyenlet

$$x^4 + x = 0,$$

melynek megoldásai

$$x_1 = 0 \quad \text{és} \quad x_2 = -1.$$

Így

$$y_1 = 0 \quad \text{és} \quad y_2 = -1.$$

Tehát a függvénynek a

$$P_1(0,0) \quad \text{és} \quad P_2(-1,-1)$$

pontokban lehet szélsőértéke. Képezzük a másodrendű parciális deriváltakat:

$$f''_{xx}(x,y) = 6x,\ f''_{xy}(x,y) = 3,\ f''_{yx}(x,y) = 3,\ f''_{yy}(x,y) = 6y.$$

Így a

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$$

determinánst kell vizsgálni. Mivel

$$D(0,0) = -9,$$

ezért a $P(0,0)$ pontban nincs szélsőértéke a függvénynek. Mivel

$$D(-1,-1) = 27,$$

ezért a $P(-1,-1)$ pontban a függvénynek van szélsőértéke. Mivel

$$f''_{(} - 1, -1) = -6 < 0,$$

ezért a függvénynek maximuma van a $P(-1,-1)$ pontban.