10. gyakorlat

Írja fel az alábbi feladatokban szereplő 2p szerint periodikus egyváltozós valós függvények Fourier-sorát, és vizsgáljuk meg, hogy mely pontokban állítja elő a sor a függvényt! A függvényt csak a $(-p, p]$ intervallumon adjuk meg.

(1/143) $f(x) = \pi^2 - x^2,\ -\pi < x \leq \pi$

Megoldás: Mivel a függvény páros, ezért Fourier-sorában csak konstans és koszinuszos tagok szerepelnek.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2 - x^2)dx = \frac{1}{\pi}\left[\pi^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Ha $n \geq 1$, akkor

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2 - x^2)\cos nx dx.$$

A parciális integrálás módszerét alkalmazzuk.

$$u(x) = \pi^2 - x^2, \quad v'(x) = \cos nx.$$

$$u'(x) = -2x, \quad v(x) = -\frac{\sin nx}{n}.$$

Így

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2 - x^2)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{\pi^2 - x^2}{n}\sin nx\right]_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\sin nx dx.$$

Az integrál kiszámításához ismét a parciális integrálás módszerét alkalmazzuk:

$$u(x) = x, \quad v'(x) = \sin nx.$$

$$u'(x) = 1, \quad v(x) = -\frac{\cos nx}{n}.$$

Így

$$\int_0^\pi x\sin nx dx = -\left[x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx dx = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}.$$

Ezért

$$a_n = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\frac{\pi}{n} = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}.$$

A vizsgált $f(x)$ függvény Fourier-sora:

$$f(x) \sim \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx.$$

Mivel a Majoráns-kritérium szerint minden x helyen a nemnegatív tagú

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx\right|$$

sort majorálja a konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

sor, ezért az $f(x)$ függvény

$$\frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

Fourier-sora minden x helyen konvergens. Mivel $f(x)$ minden x helyen folytonos, ezért megegyezik Fourier-sorának összegfüggvényével, azaz

$$f(x) = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx.$$

(1/144) $f(x) = \sin x,\ -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$

Megoldás: Mivel a függvény páratlan, ezért Fourier-sorában csak szinuszos tagok szerepelnek. Mivel a függvény $2p = \pi$ szerint periodikus, ezért $p = \frac{\pi}{2}$. Tetszőleges $n \geq 1$ index esetén

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2nx dx.$$

Alkalmazzuk a

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

képletet. Így

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2n-1)x - \cos(2n+1)x)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} - \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1}.$$

Ezért

$$f(x) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1}\sin 2nx.$$

Mivel az $f(x)$ függvény szakaszonként monoton növekvő, ezért Fourier-sora minden x helyen konvergens. Az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ helyeken a függvény nem folytonos, de ezeken a helyeken van jobb és bal oldali határérték. Így ezeken a helyeken:

$$0 = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1}\sin 2nx.$$

A többi x helyen (ahol $f(x)$ folytonos):

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1}\sin 2nx.$$

(1/145) $f(x) = \begin{cases} -2x; & ha\ -\pi < x \leq 0 \\ 3x, & ha\ 0 < x \leq \pi \end{cases}$

Megoldás:

$$f(x) = \frac{5\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right).$$

(1/146) $f(x) = |x|,\ -\pi < x \leq \pi$

Megoldás:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

(1/147) $f(x) = sgn \cos x,\ -\pi < x \leq \pi$

Megoldás:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1},\ x \in \mathbb{R}.$$

Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

(2/1)

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$$

Megoldás: Osszuk el a számlálót és a nevezőt is az xy szorzattal. Akkor

$$\frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} = \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}}.$$

Elegendő tehát a jobb oldalon álló függvény határértékét vizsgálni. A számtani közép és mértani közép közötti kapcsolatot is használva,

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\frac{y}{x}} = 2.$$

Így

$$\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x} \geq 1,$$

és ezért

$$\frac{1}{\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}} \leq 1.$$

Ebből már az is következik, hogy

$$\frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{x}.$$

Mivel

$$0 \leq \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$$

és

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)=0,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}}=0$$

Tehát

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0.$$

(2/2)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to\infty}} x\cos y.$$

Megoldás: Mivel az első tényező, azaz x a 0-hoz tart, a második tényező, azaz $\cos y$ pedig korlátos, ezért szorzatuk a 0-hoz tart, azaz

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to\infty}} x\cos y=0.$$

(2/3)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}.$$

Megoldás: Mivel a számláló is és a nevező is a 0-hoz konvergál, át kell alakítanunk a vizsgált függvényt. Bővítsük a törtet a nevező un. konjugáltjával:

$$\frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{(\sqrt{x^2+y^2+4}-2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}=\frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{x^2+y^2}=$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+4}+2.$$

Így

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2+4}+2=4.$$

(2/4)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}.$$

Megoldás: Mivel a számláló is és a nevező is a 0-hoz konvergál, át kell alakítanunk a vizsgált függvényt. Bővítsük a törtet a számláló un. konjugáltjával:

$$\frac{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}.$$

Így

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

(2/5)

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Megoldás: Mivel a számláló ln 2-höz, a nevező pedig 1-hez konvergál, ezért

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = ln\ 2.$$

(2/6)

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to \infty}} \frac{2xy-1}{y+1}.$$

Megoldás: Mivel a számláló is és a nevező is ∞-hez divergál, ezért át kell alakítani a függvényt. Osszuk el y-nal a számlálót is és a nevezőt is! Mivel $y \to \infty$, ezért feltehetjük, hogy $y > 0$, és ezért az említett átalakítás elvégezhető.

$$\frac{2xy-1}{y+1} = \frac{2x-\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y}}.$$

Így

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to\infty}} \frac{2xy-1}{y+1} = \lim_{\substack{x\to 3\\ y\to\infty}} \frac{2x-\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y}} = 6.$$

Számítsuk ki az alábbi többváltozós valós függvények gradiensét a megadott P_0 helyen!

(3/47)

$$f(x,y) = xln(x+y), \quad P_0(-2,3).$$

Megoldás: Mivel

$$f'_x(x,y) = ln(x+y) + \frac{x}{x+y},$$

és

$$f'_y(x,y) = \frac{x}{x+y},$$

ezért

$$f'_x(-2,3) = ln(-2+3) + \frac{-2}{-2+3} = -2$$

és

$$f'_y(-2,3) = \frac{-2}{-2+3} = -2.$$

Így

$$\underline{grad} f(-2,3) = [f'_x(-2,3), f'_y(-2,3)] = [-2,-2].$$

(3/48)

$$f(x,y) = arccos\frac{x}{y}, \quad P_0(1,2).$$

Megoldás: Mivel

$$f'_x(x,y) = -\frac{1}{y}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}},$$

$$f'_y(x,y) = \frac{x}{y^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}},$$

valamint

$$f'_x(1,2) = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

és

$$f'_y(1,2) = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

így

$$\underline{grad} f(1,2) = [f'_x(1,2), f'_y(1,2)] = [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}].$$

(3/49)

$$f(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}, \quad P_0(3,-4,7).$$

Megoldás: Mivel

$$f'_x(x,y,z) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$f'_y(x,y,z) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$f'_z(x,y,z) = 1,$$

valamint

$$f'_x(3,-4,7) = -\frac{3}{5},$$

és

$$f'_y(3,-4,7) = \frac{4}{5},$$

$$f'_z(3,-4,7) = 1,$$

így

$$\underline{grad} f(3,-4,7) = [f'_x(3,-4,7), f'_y(3,-4,7), f'_z(3,-4,7)] = [-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1].$$

Keressük meg azokat a pontokat, amelyekben az alábbi függvények gradiensvektora a nullvektor!

(4/58)

$$f(x,y) = 3x^2 - 4xy + 2x + y^2 + 1.$$

Megoldás: Mivel

$$f'_x(x,y) = 6x - 4y + 2$$

és

$$f'_y(x,y) = -4x + 2y,$$

ezért az $f(x,y)$ függvény gradiense azokban a pontokban nullvektor, amely pontok x és y koordinátáira teljesülnek az alábbi egyenletek:

$$\begin{array}{rrcr} 6x & -4y & = & -2 \\ -4x & +2y & = & 0 \end{array}$$

Ez egy inhomogén lineáris egyenletrendszer, melynek megoldása:

$$x = 1, \quad y = 2.$$

Tehát a $P_0(1,2)$ pontban lesz az $f(x,y)$ függvény gradiensvektora nullvektor.

(4/59)

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 - 5x + y + 3.$$

Megoldás: Mivel

$$f'_x(x,y) = 2x + y - 5$$

és

$$f'_y(x,y) = x + 4y + 1,$$

ezért az $f(x,y)$ függvény gradiense azokban a pontokban nullvektor, amely pontok x és y koordinátáira teljesülnek az alábbi egyenletek:

$$\begin{array}{rrcr} 2x & +y & = & 5 \\ x & +4y & = & -1 \end{array}$$

Ez egy inhomogén lineáris egyenletrendszer, melynek megoldása:

$$x = 3, \quad y = -1.$$

Tehát a $P_0(3,-1)$ pontban lesz az $f(x,y)$ függvény gradiensvektora nullvektor.

(4/60)

$$f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 3x + 2y + z.$$

Megoldás: Mivel

$$f'_x(x,y,z) = 4x + 2y - 3,$$
$$f'_y(x,y,z) = 2x + 2y + 2$$

és

$$f'_z(x,y,z) = -2z + 1,$$

ezért az $f(x,y,z)$ függvény gradiense azokban a pontokban nullvektor, amely pontok x, y és z koordinátáira teljesülnek az alábbi egyenletek:

$$\begin{array}{rrrcr} 4x & +2y & & = & 3 \\ 2x & +2y & & = & -2 \\ & & -2z & = & -1 \end{array}$$

Ez egy inhomogén lineáris egyenletrendszer, melynek megoldása:

$$x = \frac{5}{2}, \quad y = -\frac{7}{2} \quad z = \frac{1}{2}.$$

Tehát a $P_0(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$ pontban lesz az $f(x,y,z)$ függvény gradiensvektora nullvektor.

5/65 Állapítsuk meg, hogy hol lesz az $f(x,y) = xy + x - y$ függvény gradiensvektora az $\underline{a} = [-1, 1]$ vektorra merőleges egységvektor!

Megoldás:

$$\underline{grad} f(x,y) = [y+1, x-1].$$

Ez akkor és csak akkor merőleges az $\underline{a}$ vektorra, ha skaláris szorzatuk 0, azaz

$$-y - 1 + x - 1 = 0.$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$y = x - 2,$$

azaz

$$\underline{grad} f(x,y) = [x-1, x-1].$$

Egy ilyen vektor akkor és csak akkor egységvektor, ha

$$\sqrt{2(x-1)^2} = 1,$$

azaz

$$2x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Ennek az egyenletnek a megoldásai: $x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ezért $y_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tehát a $P_1(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$ és $P_2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ pontokban lesznek a gradiensvektorok olyan egységvektorok, amelyek merőlegesek az $\underline{a}$ vektorra.

Számítsuk ki az alábbi függvények iránymenti differenciálhányadosait a megadott P_0 pontban az $\underline{a}$ vektor irányában!

(6/76)

$$f(x,y,z) = 2^x yz, \quad P_0(1,-1,1), \quad \underline{a} = [0,2,-1].$$

Megoldás: Mivel

$$\underline{grad} f(x,y,z) = [2^x yz ln2, 2^x z, 2^x y],$$

ezért

$$\underline{grad} f(1,-1,1) = [-2ln2, 2, -2].$$

Az $\underline{a}$ vektorral egyező irányú egységvektor

$$\underline{e} = [0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}].$$

Így

$$f'_{\underline{e}}(1,-1,1) = [-2ln2, 2, -2] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$