

GYAKORLÓ FELADATOK AZ ELSŐ ZÁRTHELYIHEZ (ALGEBRA 1)

- (1) Mutassuk meg, hogy tetszőleges G csoport tetszőleges a és b elemeire igazak az alábbiak!

$$(1.1) \quad o(a) = o(b^{-1}ab);$$

$$(1.2) \quad o(ab) = o(ba);$$

$$(1.3) \quad o(a^k) = \frac{o(a)}{\ln.k.o.(k, o(a))};$$

$$(1.4) \quad \text{Ha } ab = ba, \text{ akkor } o(ab) | \ln.k.t.(o(a), o(b));$$

$$(1.5) \quad \text{Ha } ab = ba \text{ és } \ln.k.o.(o(a), o(b)) = 1, \text{ akkor } o(ab) = o(a)o(b).$$

(Megoldás (1.1): Ha $o(a) = n$, akkor $a^n = e$, és ezért $(b^{-1}ab)^n = b^{-1}abb^{-1}ab \cdots b^{-1}ab = b^{-1}a^n b = b^{-1}eb = e$. Így $o(b^{-1}ab) \leq o(a)$. Ha $o(b^{-1}ab) = m$, akkor $e = (b^{-1}ab)^m = b^{-1}abb^{-1}ab \cdots b^{-1}ab = b^{-1}a^m b$, amiből $e = beb^{-1} = a^m$ adódik. Ezért $o(a) \leq o(b^{-1}ab)$, ami az előző egyenlőtlenséggel együtt a $o(a) = o(b^{-1}ab)$ egyenlőséget eredményezi.

Megoldás (1.2): Ha $o(ab) = n$, akkor $(ab)^n = e$ és ezért $(ba)^{n+1} = b(ab)^n a = bea = ba$, és ezért $(ba)^n = e$. Tehát $o(ba) \leq o(ab)$. Hasonlóan igazolható, hogy $o(ab) \leq o(ba)$. Így $o(ab) = o(ba)$.

Megoldás (1.3): Legyen $o(a) = n$. Jelölje $d = \ln.k.o(o(a), k) = (n, k)$. Akkor $o(a) = n = dn'$ és $k = dk'$. Megjegyezzük, hogy ekkor $\ln.k.o.(n', k') = 1$. Így $\frac{o(a)}{\ln.k.o(o(a), k)} = \frac{n}{d} = n'$. Jelölje $m = o(a^k)$. $e = (a^k)^m = a^{km}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $o(a) | km$, azaz $n | km$. Ez azt jelenti, hogy $dn' | mdk'$, mert $n = dn'$ és $k = dk'$. Ez azzal ekvivalens, hogy $n' | mk'$. Mivel n' és k' relatív prímek (azaz $\ln.k.o.(n', k') = 1$), ezért az $n' | mk'$ akkor és csak akkor teljesül, ha $n' | m$. Az ilyen m -ek közül a legkisebb n' . Tehát $o(a^k) = n' = \frac{o(a)}{\ln.k.o(o(a), k)}$.

Megoldás (1.4): Legyen $o(a) = n$, $o(b) = m$. Jelölje $d = \ln.k.t.(o(a), o(b)) = \ln.k.o.(n, m)$. Akkor $d = nx$ és $d = my$. Így $(ab)^d = (a^n)^x (b^m)^y = e$, és ezért $d = to(ab)$, azaz $o(ab) | d = \ln.k.t.(o(a), o(b))$.

Megoldás (1.5): Jelölje $d = \ln.k.o.(o(a), o(b))$. Legyen $o(a) = n$, $o(b) = m$. $(ab)^k = e$ akkor és csak akkor, ha $a^k = b^{-k}$. Így $a^{mk} = b^{-mk} = e$ és $b^{nk} = a^{-nk} = e$. Ezért $n | mk$ és $m | nk$. Mivel m és n relatív prímek, ezért $n | k$ és $m | k$, amiből $mn | k$ következik. A legkisebb ilyen k egyenlő mn -nel. Tehát $o(ab) = o(a)o(b)$.

- (2) Igazoljuk, hogy ha egy G csoport minden e -től különböző elemének ugyanaz a rendje, akkor ez a rend egy prímszám!

(Megoldás: Ha ez a közös rend k és ez nem lenne prímszám, akkor k előállna $k = nm$ szorzatként, ahol $1 < m, n < k$. Így tetszőleges $g \in G$, $g \neq e$ elemre $e = (g^n)^m$ teljesülne. Mivel $m < k$, ezért $g^n = e$ lehet csak, amiből $n < k$ miatt $g = e$ teljesülne, ami ellentmondás. Így k prímszám.)

- (3) Mutassuk meg, hogy minden páros rendű csoportban van másodrendű elem!

(Megoldás: Mivel $e^{-1} = e$, ezért az (a, a^{-1}) párok között (ahol $a \neq e$) kell lenni olyannak amelyben $a = a^{-1}$, ami azzal ekvivalens, hogy $a^2 = e$.)

- (4) Igazoljuk, hogy egy olyan csoport, amelyben minden e -től különböző elem másodrendű, szükségképpen kommutatív!

(Megoldás: Tetszőleges a elemre az $a^2 = e$ miatt $a = a^{-1}$. Így $ab = (ab)^{-1}$ is igaz mindegy a és b elemre. Ezért $ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$.)

- (5) Mutassuk meg, hogy egy véges egységelemes félcsoportban egy elemnek akkor és csak akkor van bal oldali inverze, ha van jobb oldali inverze!

(Megoldás: Legyen a' egy $a \neq e$ elem jobb oldali inverze. A végeesség miatt $a^k = a^{k+m}$ valamely k és m pozitív egész számokra, amely $a^k = a^m a^k$ formában is írható. Jobbról szorozzuk meg a' -vel ezt az egyenletet k -szor. Azt kapjuk, hogy $a^m = e$. Mivel $m \geq 2$, ezért a^{m-1} az a bal oldali inverze (és egyben a jobb oldali is.)

- (6) Adja meg egy $C(\infty) = \{a\}$ ciklikus csoport a^n eleme által generált részcsoporthoz indexét!

(Megoldás: Két elem a^x és a^y ($x, y \in \mathbb{Z}$) akkor és csak akkor van ugyanabban a bal oldali mellékosztályban, ha $a^{-x}a^y \in H$, azaz $n|y - x$, azaz $x \equiv y \pmod{n}$. Ebből következően a mellékosztályok száma $|\mathbb{Z}_n| = n$.)

- (7) Mutassuk meg, hogy csoportok direkt szorzata is csoport!

- (8) Mutassuk meg, hogy $C(n) \times C(m)$ akkor és csak akkor ciklikus, ha n és m relatív prímek!

(Megoldás: Legyen $C(n) = \{a\}$ és $C(m) = \{b\}$. Jelölje (e, f) a $C(n) \times C(m)$ csoport egységelemét! Ha k olyan pozitív egész, amelyre $(a, b)^k = (e, f)$, akkor $(a^k, b^k) = (e, f)$ és ezért $o(a)|k$ és $o(b)|k$. Tehát k a $o(a)$ és $o(b)$ közös többszöröse, akkor $o((a, b))$ az ilyen k -k legkisebbike, azaz $\text{l.k.t.}(n, m)$. Ha $o(a) = n$ és $o(b) = m$ relatív prímek, akkor a legkisebb közös többszörös $= nm$, ami a direkt szorzat számossága. Ekkor az (nm) elemet tartalmazó direkt szorzat ciklikus, mert az nm rendű (a, b) generálja. Ha m és n nem relatív prímek, akkor $\text{l.k.t.}(n, m) < nm$,

és ekkor (a, b) nem generálja a direkt szorzatot. Ekkor ugyanis $\{(a, b)\}$ nm -nél kevesebb elemet ad. Ez igaz az $\{(a^x, b^y)\}$ részcsoporthra is. Tehát egyetlen egy eleme sem generálja a direkt szorzatot. Így az nem ciklikus.)

(9) Mutassuk meg, hogy prímszámrendű csoport ciklikus!

(10) Mutassuk meg, hogy egy csoport akkor és csak akkor prímszám rendű, ha pontosan két részcsoporthja van!

(Megoldás: Ha egy G csoport prímszám rendű, akkor annak csak $\{e\}$ és a G a részcsoporthjai a Lagrange-tétel miatt. Tegyük fel, hogy egy csoportnak csak két részcsoporthja van; ez az $\{e\}$ és a G . Legyen $a \neq e$ tetszőleges elem. Akkor $\{e\} \subsetneq \langle a \rangle \subseteq G$. A feltétel miatt $\langle a \rangle = G$. Tehát G ciklikus csoport. Így G egy kommutatív egyszerű csoport, ami miatt G prímszám rendű ciklikus csoport.)

(11) Igazoljuk, hogy egy csoport akkor és csak akkor véges, ha véges sok részcsoporthja van!

(Megoldás: Ha egy G csoport véges, akkor nyilvánvalóan véges sok részcsoporthja van. Tegyük fel, fordítva, hogy egy G csoportnak véges sok részcsoporthja van. G előáll ciklikus részcsoporthjainak uniójaként (hiszen minden eleme benne van egy ciklikus részcsoporthban; az általa generált ciklikus részcsoporthban). A ciklikus részcsoporthok száma is véges. Mivel végtelen ciklikus csoportnak végtelen sok (ciklikus) részcsoporthja van, ezért ezen véges sok ciklikus részcsoporthok mindegyike véges. Ebből már következik, hogy G -nek véges sok eleme van.)

(12) Mutassuk meg, hogy ha G_i ($i = 1, \dots$) olyan csoportok, hogy mindegyik részcsoporthja az eggyel nagyobb indexűnek, akkor $\cup_{i \in I} G_i$ részcsoporth.

(13) A $(\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$ csoportban mely elemeknek véges a rendje?

(Megoldás: $1 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ akkor és csak akkor, ha $r = 1$ és $n\varphi = k\pi$, azaz $\varphi = \frac{k}{n}\pi$. Itt tehát k/n tetszőleges racionális szám.)

(14) Mutassuk meg, hogy ha a véges G csoport rendje n , és m olyan pozitív egész szám, hogy $(n, m) = 1$, akkor minden $g \in G$ elem esetén a $g^m = e$ feltételből $g = e$ következik, továbbá az $x^m = g$ egyenletnek minden $g \in G$ elemre pontosan egy megoldása van!

(Megoldás: Ha $g^m = e$, akkor $o(g) | m$. A Lagrange-tétel miatt $o(g) | n$, Így $o(g)$ az n és m közös osztója. Mivel $(n, m) = 1$, ezért $o(g) = 1$, azaz $g = e$.

A második állítás bizonyítása. $(\exists u, v \in \mathbb{Z}): un + vm = 1$. Ekkor $g = g^{un+vm} = (g^n)^u (g^v)^m = e^u (g^v)^m = (g^v)^m = x^m$. Ha x és y is megoldás, akkor $x^m = y^m$ és így $x = x^{un+vm} = (x^n)^u (x^m)^v = (x^m)^v = (y^m)^v = ymv y^{nu} = y^{un+vm} = y$.

(15) Határozza meg a $(\mathbb{Z}; +)$, illetve a $(\mathbb{Z}_m; +)$ ($m \in \mathbb{N}^+$) csoportok generátorelemeit.

(Megoldás: $(\mathbb{Z}; +)$ generátorelemei ± 1 . $(\mathbb{Z}_m; +)$ ($m \in \mathbb{N}^+$) generátorelemei minden $k \in \mathbb{Z}_m$ elemek, amelyek m -mel relatív prímek.

(16) Mutassuk meg, hogy a $(\mathbb{Q}; +)$ csoportnak nincs véges generátorrendszere!

(Megoldás: Tegyük fel, hogy a $(\mathbb{Q}; +)$ csoportnak van véges generátorrendszere:

$$\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_s}{q_s}.$$

Feltehetjük, hogy a nevezők mindegyike pozitív. Legyen P olyan egész szám, amelyre $P > q_1 \cdots q_s$ teljesül. Megmutatható, hogy $\frac{1}{P}$ nincs benne a $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_s}{q_s}$ elemek által generált részcsoporthoz. Ha $\frac{1}{P}$ benne lenne a $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_s}{q_s}$ elemek által generált részcsoporthoz, akkor meg lehetne adni olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ egész számokat, amelyekkel

$$\frac{1}{P} = \alpha_1 \frac{p_1}{q_1} + \dots + \alpha_s \frac{p_s}{q_s} = \frac{\beta_1 p_1 + \dots + \beta_s p_s}{q_1 \cdots q_s},$$

azaz

$$P(\beta_1 p_1 + \dots + \beta_s p_s) = q_1 \cdots q_s$$

teljesülne. Jól látható, hogy a $q_1 \cdots q_s$ szorzat egy pozitív egész szám. Ezért

$$P \leq q_1 \cdots q_s,$$

ami ellentmondás.

(17) Igazoljuk, hogy egy G Abel-csoportban

(a) $H_k(G) = \{a^k | a \in G\}$ részcsoporthoz,

(b) $A_n = \{a \in G | o(a) | n\}$ ($n \in \mathbb{N}^+$) részcsoporthoz!

(Megoldás: (a): $a^k b^k = (ab)^k$ miatt $H_k(G)H_k(G) \subseteq H_k(G)$. Továbbá, $(a^k)^{-1} = (a^{-1})^k$ és ezért $(H_k(G))^{-1} \subseteq H_k(G)$.)

(b): Ha $a, b \in A_n$, akkor $o(a) | n$ és $o(b) | n$. Így $o(a)x = n = o(b)y$. Tehát n a $o(a)$ és $o(b)$ közös többszöröse. Mivel $o(ab) = \text{l.k.t.}(o(a), o(b))$, ezért n az $o(ab)$ pozitív egész számú többszöröse, azaz $o(ab) | n$.

- (18) Mutassuk meg, hogy két részcsoporthoz szorzata akkor és csak akkor részcsoporthoz, ha felcserélhetők egymással!

(Megoldás: Legyenek A és B részcsoporthoz. Akkor $A^2 = A$, $B^2 = B$, $a^{-1} = A$, és $B^{-1} = B$. Tegyük fel, hogy felcserélhetők, azaz $AB = BA$. Akkor $(AB)^2 = ABAB = AAB B = A^2 B^2 = AB$ és $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} = BA$. Tehát AB is részcsoporthoz. Fordítva, most induljunk ki abból, hogy AB részcsoporthoz. Akkor $(AB)^{-1} = AB$, és így $B^{-1} A^{-1} = AB$, ami $BA = AB$, mert $A^{-1} = A$ és $B^{-1} = B$.)

- (19) Mutassuk példát arra, hogy egy G csoport tetszőleges H , K , L részhalmazaira a $HK = HL$ egyenlőségből nem következik mindig $K = L$. Viszont tetszőleges $h \in G$ elemre $hK = hL$ -ből $K = L$ következik!

(Megoldás: $GK = GL = G$ minden $K \neq L$ részhalmazra. Ha $hK = hL$, akkor minden $k \in K$ elem esetén $hk \in hL$, és így $hk = hl$, amiből az egyszerűsíthetőség miatt $k = l \in L$ következik. Így $K \subseteq L$. Hasonlóan adódik az $l \subseteq K$ tartalmazás is. Így $K = L$.)

- (20) Bizonyítsuk be, hogy ha H és K egy G csoport olyan véges részcsoporthoz, melyek rendje relatív prím, akkor $H \cap K = \{e\}$!

(Megoldás: Legyen n a H rendje, m pedig a K rendje. Ha $x \in H \cap K$, akkor $o(x) | n$ és $o(x) | m$ (a Lagrange-tétel miatt). Mivel n és m relatív prímekek, ezért $o(x) = 1$, azaz x a G csoport egységeleme.)

- (21) Határozzuk meg az alábbi G csoportok megadott H részcsoporthoz szerinti bal oldali, illetve jobb oldali mellékosztályait!

$$(1) \ G = C(n) = \langle a \rangle, \ H = \{a^d\} \ (d|n). \text{ Pl. } n = 6 \text{ és } d = 3.$$

$$(2) \ G = (C - \{0\}; \cdot) \text{ és } H = (R - \{0\}; \cdot)$$

- (22) Mutassuk meg, hogy $(P(H); \Delta)$ csoport, ahol $P(H)$ jelöli egy nem üres H halmaz összes részhalmazának halmazát (azaz a H halmaz hatványhalmazát), a Δ művelet pedig a következőképpen van értelmezve: tetszőleges $A, B \subseteq H$ részhalmazra

$$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

(Megoldás: Halmazelméleti azonosságokkal bizonyítható az asszociativitás. A művelet kommutatív is. Mivel

$$\emptyset \Delta A = (\emptyset \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{\emptyset}) = \emptyset \cup A = A,$$

ezért $\emptyset$ a neutrális elem. Mivel

$$A \triangle A = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{A}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset,$$

ezért A inverze önmaga.)

- (23) Bizonyítsuk be, hogy ha H 2-indexű részcsoportha egy G csoportnak, akkor tetszőleges $g \in G$ elemre $g^2 \in H$ teljesül, továbbá $G \setminus H$ minden eleme páros rendű!

Megoldás: Mivel H részcsoportha, ezért $g^2 \in H$ minden $g \in H$ elemre. Nézzük meg, hogy mi a helyzet a $g \in G \setminus H$ elemekkel! Mivel H 2 indexű részcsoportha a G csoportnak, ezért H normális részcsoportha G -ben. Mivel H indexe 2, ezért a G/H faktorcsoportha 2 eleme van. Ebben H (mint egy osztály) neutrális elem, $G \setminus H$ (mint a másik osztály) pedig olyan elem, melynek négyzete a neutrális elem G/H -ben, azaz $(G \setminus H)(G \setminus H) = H$ a G -ben. Tehát minden $g \in G \setminus H$ elemre is $g^2 \in H$. Így $g^2 \in H$ minden $g \in G$ elemre teljesül. Az előző részből már következik az is, hogy ha $g \notin H$, akkor

$$g^4, g^6, \dots, g^{2k}, \dots$$

elemek mindegyike H -ban van. Mivel $g \notin H$, ezért a

$$g^3, g^5, \dots, g^{2k+1}, \dots$$

elemek H komplementerében vannak. Mivel az e neutrális elem H -ban van, ezért a g elemnek csak valamely páros kitevőjű hatványa lehet egyenlő a neutrális elemmel, és ezért az ilyen kitevők közül a legkisebb, azaz a g rendje is csak páros szám lehet.)

- (24) Mutassuk meg, hogy minden permutáció előáll páronként diszjunkt ciklusok szorzataként!
- (25) Bontsuk fel az $(5234)(135)(437)$ permutációt páronként diszjunkt ciklusok szorzatára!
- (26) Oldjuk meg az $(132)(25)\pi(457) = (26)$ egyenletet S_7 -ben!
(Megoldás: $\pi = (25)^{-1}(132)^{-1}(26)(457)^{-1} = (5316247)$.)
- (27) Bizonyítsuk be, hogy egy permutáció rendje megegyezik páronként diszjunkt ciklusok hosszának legkisebb közös többszörösével!
(Megoldás: Legyen σ a $c_1, \dots, c_m$ diszjunkt ciklusok szorzata. Ha $e = \sigma^n$, akkor $e = c_1^n \cdots c_m^n$, mert diszjunkt ciklusok egymással felcserélhetőek. Az is igaz, hogy a c_i^n által mozgatott elemeket a többi n -dik hatvány fixen hagyja, ezért az utóbbi

egyenlőségből $c_i^n = e$ következik minden $i = 1, \dots, m$ indexre. Tehát $o(c_i) | n$ minden i -re, azaz n a $o(c_i)$ -k közös többszöröse. Ezek közül a legkisebb a legkisebb közös többszörös. Tehát $o(\sigma) = \text{lk.k.t.}(c_1, \dots, c_m)$.

- (28) Mutassuk meg, hogy minden permutáció négyzete páros!

(Megoldás: Az A_n alternáló csoport az S_n szimmetrikus csoport 2 indexű részcsoporthja. Így (a 23. feladat szerint) minden permutáció négyzete A_n -ben van, azaz minden permutáció négyzete páros.)

- (29) Mutassuk meg, hogy két páratlan permutáció szorzata páros, két páros permutáció szorzata páros, egy páros és egy páratlan permutáció szorzata páratlan!

(Megoldás: Mivel a páros permutációk az S_n csoport 2 indexű A_n részcsoporthjában, a páratlan permutációk pedig az A_n részcsoporth S_n -beli komplementrében, ezért $A_n^2 = A_n$ és $(S_n \setminus A_n)^2 \subseteq A_n$ miatt igaz a feladatban szereplő állítás.)

- (30) Mutassuk meg, hogy páratlan permutáció rendje páros!

(Megoldás: Alkalmazzuk a 23. feladatot a $G = S_n$ és a $H = A_n$ csoportokra.)

- (31) Mutassuk meg, hogy minden transzpozíció páratlan permutáció!

(Megoldás: Egy transzpozíció két elemet cserél, a többi helyben hagyja. Mivel két elem cseréje páratlan számú szomszédos elem cseréjével megvalósítható, ezért az inverziók száma páratlan.)

- (32) Mutassuk meg, hogy egy permutáció akkor és csak akkor páros, ha előáll páros sok transzpozíció szorzataként!

(Megoldás: Tegyük fel, hogy egy permutáció előáll páros sok transzpozíció szorzataként. Akkor az első kettő szorzata páros, a harmadik és negyedik szorzata ismét páros, ... , a két utolsó szorzata is páros. Mivel páros permutációk szorzata páros, ezért az egész szorzat is páros permutáció. Ebből már az is következik, hogy páratlan sok transzpozíció szorzata páratlan. Így igaz a feladatban szereplő állítás.)

- (33) Mutassuk meg, hogy páros hosszúságú ciklus paritása páratlan, páratlan hosszúságú ciklus paritása pedig páros!

(Megoldás: $(1234 \dots n) = (12)(13) \dots (1, n)$ és a transzpozíciók száma $n - 1$. Ebből már következik, mert egy permutáció paritása megegyezik az előállításában szereplő transzpozíciók számának paritásával.)

- (34) Mutassuk meg, hogy A_n az S_n csoport normális részcsoporthja!
 (Megoldás: Mivel A_n -nek az S_n -beli indexe 2, ezért A_n normális részcsoporth.)
- (35) Mutassuk meg, hogy (nem feltétlenül diszjunkt) ciklusok szorzata akkor és csak akkor páros, ha páros sok páros hosszúságú ciklus van a szorzatban (persze lehetnek benne egyéb ciklusok, amelyek páratlan hosszúságúak).
 (Megoldás: Ha páros sok páros hosszúságú $c_1, \dots, c_{2n}$ ciklus szerepel a felbontásban, akkor valamilyen c_1 páratlan, ahol valami vagy nincs ott, vagy ott van, de páratlan hosszúak, és ezért ez páros perm. Hasonlóan a c_1 -et követők szorzata szor c_2 is páratlan. Tehát a c_2 -ig vett szorzat (beleértve c_2 -t is, páros. A c_4 -ig vett szorzat is páros, ... a c_{2k} -ig vett szorzat is páros. Ez még szorozva van a c_{2k} -t követő páros permutációk szorzatával, az egész szorzat páros permutáció. Ha páratlan sok páros permutáció van benne, akkor c_{2k} -ig párost kapunk. majd innen a c_{2k+1} -ig páratlan. Ezért a c_{2k+1} -ig (az elejétől) páratlan. Ezt még a maradék párossal szorozva páratlan permutációt kapunk.)
- (36) Mutassuk meg, hogy ha H és K a G csoport normális részcsoporthjai és $H \cap K = \{e\}$, akkor $hk = kh$ minden $h \in H$ és $k \in K$ elemre.
 (Megoldás: $h^{-1}k^{-1}hk \in H \cap K$ miatt $h^{-1}k^{-1}hk = e$, és így $hk = kh$.)
- (37) Egy G csoport H részcsoporthját karakterisztikus részcsoporthnak nevezzük, ha G minden automorfizmusa (azaz önmagára való izomorfizmusa) H elemeit H -ba képezi le. Mutassuk meg, hogy egy G csoport minden karakterisztikus részcsoporthja normálosztó.
 (Megoldás: Mivel a G tetszőleges g eleme esetén $f_g : a \mapsto g^{-1}ag$ a G egy automorfizmusa, ezért minden $g \in G$ és $h \in H$ elemek esetén $g^{-1}hg \in H$, mert H karakterisztikus részcsoporth. Így $g^{-1}Hg \subseteq H$, azaz H normális részcsoporthja G -nek.)
- (38) Mutassuk meg, hogy ha egy csoportban egyetlen k -adrendű részcsoporth van, akkor az karakterisztikus részcsoporth.
 (Megoldás: Mivel egy automorfizmus egy k -adrendű részcsoporthot egy k -adrendű részcsoporthra képez le, ezért az egyetlen k -adrendű H részcsoporthot minden automorfizmus H -ra képez. Így H karakterisztikus részcsoporth.)
- (39) Mutassuk meg, hogy egy csoport összes maximális részcsoporthjának metszete karakterisztikus részcsoporth.

(Megoldás: Legyen M maximális részcsoport, és α egy automorfizmus. Ha $\alpha(M)$ nem maximális, akkor van olyan H részcsoport, melyre $\alpha(M) \subset H \subset G$ teljesül. Legyen $K = \alpha^{-1}(H)$. Ez részcsoport és $M \subset H \subset G$, ami ellentmondás. Tehát α maximális részcsoportot maximális részcsoportba visz. Ebből már következik az állítás.)

(40) Mutassuk meg, hogy ha H részcsoport a G csoportban, akkor $N = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$ a G csoport H -ba eső legbővebb normálosztója.

(41) Mutassuk meg, hogy ha M és N egy G csoport normálosztója, akkor MN is normálosztó G -ben.

(Megoldás: Mivel M és N olyan részcsoportok, amelyek egymással felcserélhetőek, ezért (a 18. feladat szerint) MN is részcsoport. Ha $g \in G$ tetszőleges elem, akkor $g^{-1}MNg = g^{-1}Mgg^{-1}Ng \subseteq MN$, mivel M és N normális részcsoportok. Így MN is normális részcsoport.)

(42) Mutassuk meg, hogy ha egy G csoport generátorelemei egymással felcserélhetőek, akkor G kommutatív.

(43) Mutassuk meg, hogy ha N a G csoport olyan normális részcsoportja, hogy N izomorf $C(2)$ -vel és a G/N faktorcsoporthoz ciklikus, akkor G kommutatív.

(Megoldás: Legyen $N = \{e, a\}$ ($a \neq e$) és $N/G = \{e, gN, g^2N, \dots, g^kN\}$. Mivel G minden x elemére $x \in g^tN$ teljesül valamely t -re, ezért előáll $x = g^ta$ alakban. Tehát g és a generálják G -t. Mivel N norm. részcsoport, ezért $gN = Ng$, azaz $g\{a, e\} = \{e, a\}g$, amiből $ga = ag$ következik ($ga = g$ nem lehet, mert akkor $a = e$ lenne, ami ellentmondás). Mivel a és g generálják G -t és a felcserélhető g -vel, ezért G kommutatív.)

(44) Mutassuk meg, hogy ha a $G/Z(G)$ faktorcsoporthoz ciklikus, akkor G Abel-csoport.

(Megoldás: Mivel $G/Z(G)$ ciklikus, ezért van olyan $a \in G$, hogy $G/Z(G) = \{aZ(G)\}_{gen}$. Így G minden g és h eleme előáll $g = a^n x$ és $h = a^k y$ alakban, ahol $x, y \in Z(G)$. Ekkor $kh = a^n x a^k y = a^k y a^n x = hk$. Tehát a G csoport kommutatív.

(45) Mutassuk meg, hogy egy G csoporton a következőképpen definiált $x \sim y$ reláció ekvivalencia-reláció: $x \sim y$ akkor és csak akkor, ha van olyan $g \in G$ elem, amelyre $a = g^{-1}bg$ teljesül.

(46) Mutassuk meg, hogy $g \in Z(G)$ akkor és csak akkor, ha g minden konjugáltja önmaga, azaz a konjugáltsági osztályában egyedül van.

- (47) Mutassuk meg, hogy minden elem centralizátora részcsoport.
- (48) Mutassuk meg, hogy egy $a \in G$ elemnek annyi különböző konjugáltja van, amennyi centralizátorának indexe.
- (49) Mutassuk meg, hogy minden n -edrendű csoport izomorf az S_n szimmetrikus csoport egy részcsoportjával.
- (50) Tetszőleges G csoport tetszőleges g eleme esetén $f_g : a \mapsto g^{-1}ag$ a G -nek automorfizmusa. Az ilyen automorfizmusokat belső automorfizmusoknak nevezzük. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G csoport esetén a G belső automorfizmusainak $\text{Inn}(G)$ csoportja a G összes automorfizmusából álló $\text{Aut}(G)$ csoportnak normális részcsoportja, és a $G/Z(G)$ faktorcsoporthoz izomorf az $\text{Inn}(G)$ csoporttal.

(Megoldás: Ha f_g egy belső automorfizmus, φ pedig egy automorfizmus, akkor tetszőleges $a \in G$ esetén $\varphi^{-1}f_g\varphi(a) = \varphi^{-1}(g^{-1}\varphi(a)g) = \varphi^{-1}(g^{-1})\varphi^{-1}(\varphi(a))\varphi^{-1}(g) = (\varphi^{-1}(g))^{-1}a\varphi^{-1}(g)$, és így $\varphi^{-1}f_g\varphi$ is belső automorfizmus. Tehát $\text{Inn}(G)$ az $\text{Aut}(G)$ normális részcsoportja. A $g \mapsto \varphi_g$ a G csoportnak az $\text{Inn}(G)$ csoportra való homomorfizmusa, melynek magja $Z(G)$. Így a homomorfizmustétel szerint $G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$.)