VIK A1 Matematika,
10. Gyakorlati anyag

2015. november 9 - 13

1. Amennyiben létezik a határérték, adjunk „jó” δ sugarat az $\epsilon = 1/10$ (illetve ∞ határérték esetén a $K = 10$) értékhez!

   (a) $\lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{5x+4}$

   (b) $\lim_{x\to 4} \frac{x^{-}16}{x^2-4x}$

   (c) $\lim_{x\to \infty} \frac{5x+1}{3x+9}$

   (d) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2}$

2. Számoljuk ki a határértékeket!

   (a) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

   (b) $\lim_{x\to -\infty} (\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} - x)$

   (c) $\lim_{x\to 1} (\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-2})$

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-1-5x}{x^2+x^5}$

   (e) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

   (f) $\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$

   (g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$

   (h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

   (i) $\lim_{x\to \infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + x)$

   (j) $\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x})$

   (k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}}{\sin x}$

   (l) $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x})$

(m) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(n) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 3\pi x}$

3. Igazoljuk: ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$, és $\lim_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1) = b$, akkor
$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^b.$$
Itt x_0 véges, vagy $\pm\infty$. Ennek segítségével számoljuk ki az alábbi határértékeket!

   (a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

   (b) $\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x} - x)^{1/x}$

   (c) $\lim_{x\to \pi/2} \sin x^{\tan x}$

4. Az alábbi képletekkel megadott folytonos függvények nem a teljes valós egyenesen vannak értelmezve; egy-egy izolált pont hiányozhat az értelmezési tartományukból. Állapítsuk meg ezen pontokban szingularitásuk típusát.

   (a) $f(x) = \frac{3(1-x^2)+|1-x^2|}{2(1-x^2)-|1-x^2|}$

   (b) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$

   (c) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2(x-3)^2}$

   (d) $f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}$

5. Határozzuk meg, ha lehetséges, a paramétereket úgy, hogy a függvény mindenütt folytonos legyen!

   (a)
$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{ha } x \le 0, \\ ax+b & \text{ha } 0 < x < 1, \\ \sqrt{x} & \text{ha } x \ge 1. \end{cases}$$

   (b)
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } |x| \le 1, \\ x^2+ax+b & \text{ha } |x| > 1. \end{cases}$$

6. Legyen f egy a teljes valós egyenesen értelmezett olyan függvény, hogy
$$\forall z \in \mathbb{R} : \ \exists \lim_{x\to z}(f(x)) =: g(z) \in \mathbb{R}\,.$$
Következik -e ebből, hogy f folytonos? És g?