

Név:

Neptun kód:

--	--	--	--	--	--	--

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\Sigma$

**1. feladat (6+12 pont)**

A) Mikor mondjuk, hogy egy  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  függvénynek egy  $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$  pontban létezik a teljes deriváltja, és mi ez a teljes derivált?

B) Tekintsük az alábbi 3 függvényt a  $[-\pi, \pi]$  intervallumon. (Ahol a formuláknak nem lenne értelme, ott értékük legyen nulla.) Melyikre vonatkozik a Dirichlet tétel, és melyikre nem? A válasz rövid indoklást is tartalmazzon.

$$i) x \mapsto \frac{x}{\sin(x/2)} \quad ii) x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad iii) x \mapsto \frac{x}{\sin(x)}$$

**2. feladat (17 pont)**

Legyen  $x \mapsto y(x)$  a megoldása az

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \arctan(\sqrt{\pi} x + y), \quad y(0) = 1$$

Cauchy-problémának. Becsüljük meg  $y(0.1)$  értékét  $y$  elsőrendű Taylor-polinomja segítségével, illetve Lagrange (hibatagra vonatkozó) tételét használva adjunk felső korlátot a becslés hibájára!

**3. feladat (16 pont)**

Adjuk meg a

$$x \mapsto y(x)? \quad y' = \frac{y^2 + y - 2}{x^2 + 2x + 2}$$

diffegyenlet összes megoldását. A megoldásfüggvényeket elég implicit alakban megadni.

**4. feladat (16 pont)**

Tekintsük az

$$f(x, y) = \sqrt{5(x-1)^4 + 4y^2}$$

képlettel megadott  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt. Döntsük el, hol léteznek, és ahol léteznek, ott írjuk föl a  $\partial_1 f$ ,  $\partial_2 f$  és  $Df$  deriváltakat.

**5. feladat (16 pont)**

Számoljuk ki a  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  és a  $z = 6 - x^2 - y^2$  egyenletű felületek által határolt térrész térfogatát.

**6. feladat (17 pont)**

Az  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényről azt tudjuk, hogy mindenütt (komplex) diffható,

$$\operatorname{Re}(f(x + iy)) = 2x^3 - \alpha xy^2 + 5x - 2y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

valamilyen  $\alpha \in \mathbb{R}$  konstansra, és  $f(0) = 2i$ . Számoljuk ki  $f(2i)$  értékét.