MEGOLDÁSVÁZLATOK

Az 1. -es feladat megoldásához nincs szükség különösebb magyarázatra. A 4. -es és 5. -ös feladatok szó szerint a megadott példatárból lettek kimásolva; ezeket itt szintén nem részletezzük, hiszen megoldásuk a példatárban szerepel.

2. feladat

A megadott görbét az x_0 fölött érintő egyenes képlete

$$y = \frac{d}{dx}\sqrt{1+x^2}|_{x=x_0}(x-x_0) + \sqrt{1+x_0^2} = \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}(x-x_0) + \sqrt{1+x_0^2}.$$

Kell: $x = x_p$, $y = y_p$ kielégítse a fönti egyenletet; azaz, hogy

$$0 = \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}(-\frac{1}{3} - x_0) + \sqrt{1+x_0^2}$$

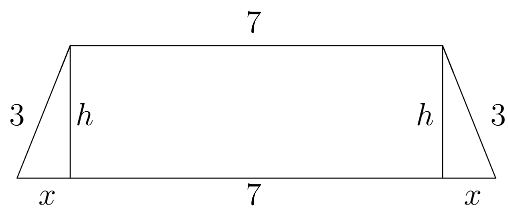
ahonnan

$$x_0(-\frac{1}{3} - x_0) + (1+x_0^2) = 0.$$

Mivel az x_0^2 -es tag kiesik, egy elsőfokú egyenletet kapunk, aminek egyetlen megoldása $x_0 = 3$. Tehát az érintési pont koordinátái $x_0 = 3$, $y_0 = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10}$.

3. feladat

A feladathoz többféleképpen is hozzá lehet fogni. Például tekinthetnénk a trapéz h magasságát paraméternek. Persze egy adott $0 < h < 3$ magassághoz két trapéz tartozik, de világos: ezek közül elég csak a nagyobb területűt, azaz azt figyelembe venni, amelyiknek "kifele" állnak a szárai:



A fönti ábra alapján a trapéz területe = 7 $\times h$ -es téglalap területe + a két kisháromszög területe:

$$T = 7h + xh$$

hiszen a két kisháromszög együtt egy $h \times x$ -es téglalappá állítható össze. Mi most nem a h magasságot, hanem az x hosszt fogjuk paraméternek tekinteni.

Mivel Pitagorasz tétele alapján $h^2+x^2=3^2$, ahonnan $h=\sqrt{9-x^2}$ (hiszen $h\geq 0$), így végül a keresett terület, mint x függvénye:

$$T(x)=7\sqrt{9-x^2}+x\sqrt{9-x^2}=(x+7)\sqrt{9-x^2}.$$

A feladat tehát $T(x)$ maximumának meghatározása az $x\in[0,3]$ intervallumon. A kérdéses intervallumon T folytonos és az intervallum belsejében differenciálható is. Ha T keresett maximuma az intervallum belsejében van, akkor kérdéses pontban T deriváltja nulla kell, hogy legyen:

$$T'(x)=\sqrt{9-x^2}+(x+7)\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\overset{!}{=}0.$$

A fönti egyenlet mindkét oldalát $\sqrt{9-x^2}$ -tel szorozva:

$$9-x^2-x(x+7)=0,$$

amely másodfokú egyenletnek egyetlen pozitív gyöke van: $x=1$. (A másik gyök negatív.) Mivel $T(0)=21, T(3)=0$ és $T(1)=8\sqrt{8}>21,0$, így tehát a keresett maximum $8\sqrt{8}$.

6. feladat

A kérdéses $x>0$ tartományon:

$$\begin{aligned}
I &= \int\left(\frac{\sqrt{x}}{e^{2x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx=\int\left(\frac{x}{e^{4x}}+\frac{2}{e^{2x}}+\frac{1}{x}\right)dx=\int\left(xe^{-4x}+2e^{-2x}+\frac{1}{x}\right)dx=\\
&= \frac{1}{-4}x(e^{-4x})'+\frac{2}{-2}e^{-2x}+\ln(x)=\frac{-1}{4}\left(xe^{-4x}-\int x'e^{-4x}\,dx\right)+\frac{2}{-2}e^{-2x}+\ln(x)\\
&= \frac{-1}{4}\left(xe^{-4x}-\frac{1}{-4}e^{-4x}\right)-e^{-2x}+\ln(x)+C\\
&= -\frac{1}{4}xe^{-4x}-\frac{1}{16}e^{-4x}-e^{-2x}+\ln(x)+C.
\end{aligned}$$