**ANALÍZIS 1**
Mérnök Informatikus szak

**ELSŐ ZÁRTHELYI**

2013 március 14
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

# MEGOLDÓKULCS

**1. feladat**

Természetesen a feladat igazából a határérték fogalmáról szól.

$$a_n = \sqrt{n^4 + 8n^2 + 999} - n^2 = \frac{n^4 + 8n^2 + 999 - n^4}{\sqrt{n^4 + 8n^2 + 999} + n^2} = \frac{8 + 999\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1 + 8\frac{1}{n^2} + 999\frac{1}{n^4}} + 1}$$

(6 pont), tehát $\lim_{n\to\infty}(a_n) = (8 + 0 + 0)/(\sqrt{1 + 0 + 0} + 1) = 8/2 = 4$ (2 pont). Mivel a sorozat konvergál a 4 -hez, létezik olyan küszöb, ami után már

$$|a_n - 4| < 4 + \frac{1}{5},$$

azaz ami után már $4 - (1/5) < a_n < 4 + (1/5) = 21/5 < 14/3$ minden $n$ -re teljesül (6 pont). Tehát az i) állítás igaz, és az ii) állítás hamis (4 pont).

**2. feladat**

Elöször érdemes némiképpen átírni a kérdéses kifejezést:

$$a_n = \left(\frac{1 + n^2}{n^2 - 3n}\right)^{2n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n}}{\left(\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n}\right.} = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n} \left(\left(1 - \frac{3}{n}\right)^n\right)^{-2}$$

(5 pont). Mármost

$$1 \leq b_n := \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n} = \sqrt[n]{\left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^2} \leq \sqrt[n]{e^2}$$

(5 pont), hiszen $m \mapsto (1+1/m)^m$ monoton nő és tart $e$ -hez. Tanultuk, hogy minden $a > 0$ esetén $\sqrt[n]{a} \to 1$; az elöbbi egyenlőtlenség tehát a **rendőr-elv** értelmében mutatja, hogy $b_n \to 1$ (3 pont). Így $\lim_{n\to\infty} a_n = 1\,(e^{-3})^{-2} = e^6$. (1 pont). Természetesen az eredmény másképpen is kihozható, de a "letakarásos" módszer hibás!

**3. feladat (17 pont)**

2 bármilyen hatványa pozitív, ezért $(a_1 > 0) \Rightarrow (a_2 > 0) \Rightarrow (a_3 > 0)\ldots$ vagyis indukciós alapon — legyen akár $a_1 = 1$ vagy $a_1 = 2$ — látjuk, hogy $a_n > 0$ minden $n$ -re. Ezért

$$a_n < a_{n+1} = 2^{2a_n - 3}a_n \quad\Leftrightarrow\quad 1 < 2^{2a_n - 3} \quad\Leftrightarrow\quad 0 < 2a_n - 3 \quad\Leftrightarrow a_n > \frac{3}{2},$$

és hasonképpen, $a_n > a_{n+1}$ pontosan akkor, ha $a_n < 3/2$ (3 pont). Tehát,

$$(a_1 < 3/2) \;\Rightarrow\; (a_2 < a_1 < \frac{3}{2}) \;\Rightarrow (a_3 < a_2 < a_1 < \frac{3}{2}) \;\Rightarrow \ldots$$

azaz indukciós alapon, ha $a_1 = 1$, akkor a sorozat minden eleme határozottan kisebb, mint 3/2 és a sorozat szigorúan monoton csökken, és hasonképpen, $a_1 = 2$ esetén a sorozat minden tagja határozottan nagyobb, mint 3/2 és a sorozat szigorúan monotonon nő (6 pont).

Ha $a_1 = 1$, akkor tehát a sorozat mon. csökken és mivel a sorozat alulról korlátos (hiszen minden tagja pozitív), ezért van (véges) határértéke (2 pont). Egy $A \in \mathbb{R}$ határértéknek azonban ki kell elégítenie a rekurziós egyenletet:

$$A = A\, 2^{2A-3},$$

amiből $A = 0$ vagy $A = 3/2$ (3 pont). Mivel $a_1 = 1$ esetén a sorozat mon. csökken, ezért ilyenkor $a_n \leq 1$ minden $n$ -re, azaz a két érték közül a tényleges határérték a nulla (1 pont).

Ha $a_1 = 2$, akkor a föntiek alapján $a_n \geq 2$ minden $n$ -re, azaz se $A = 0$ se $A = 3/2$ nem lehet határérték $\Rightarrow$ a sorozat monoton nő, de nincs véges határérték $\Rightarrow$ a sorozat a $+\infty$ -be tart (2 pont).

**4. feladat (14 pont)**

$$0 \leq a_n := \frac{5^{n+1}}{2^n + 3^{2n}} = \frac{5^{n+1}}{2^n + 9^n} \leq \frac{5^{n+1}}{9^n} = 5\left(\frac{5}{9}\right)^n := b_n$$

(3 pont) és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n < \infty$ lévén, hogy itt egy konvergens geometriai sorral ($q = 5/9 \in (-1,1)$) van dolgunk. Tehát a **majoráns krit.** alapján az eredeti sor is konvergens; a sorösszeg véges (3 pont). Az értékre pontos kifejezést adni nehéznek tűnik, viszont a kért hibabecslés könnyen elvégezhető:

$$\text{hiba} = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{100} a_n\right| = \left|\sum_{n=101}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=101}^{\infty} b_n$$

(3 pont), ahol

$$\sum_{n=101}^{\infty} b_n = 5\sum_{n=101}^{\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n = 5\left(\frac{5}{9}\right)^{101}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n = 5\left(\frac{5}{9}\right)^{101}\frac{1}{1-\frac{5}{9}} = \frac{45}{4}\left(\frac{5}{9}\right)^{101}$$

(4 pont). Azaz a hiba legföljebb $\frac{45}{4}\left(\frac{5}{9}\right)^{101}$ lenne, ami egy igen kicsi szám.

**5. feladat (4*5=20 pont)**

Mivel $|\frac{1+2\sin n}{n\sqrt{n}}| \leq \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}}$ és a tanultak szerint $\sum_{n=1}^{\infty} 3/n^{\frac{3}{2}} < \infty$, ezért a **majoráns kritérium** alapján mind az a) mind a b) kérdés sora **abszolút konvergens**, ami persze azt is mutatja, hogy a sorösszeg létezik és véges.

Ezzel szemben, ha $n \geq 2$ akkor

$$0 \leq a_n := \frac{n}{n^2 + \cos(n)} \leq \frac{n}{n^2 - 1} \leq \frac{n}{\frac{1}{2}n^2} = \frac{2}{n}$$

és — szintén a tanultak szerint — $\sum_{n=1}^{\infty} 2/n = +\infty$, azaz a **minoráns kritérium** alapján a c) feladat sorösszege is $+\infty$. Azonban, mivel $a_n$ pozitív és az elöbbi egyenlőtlenség a **rendőr-elv** alapján azt is bizonyítja, hogy $a_n \to 0$, fölmerül a gyanú, hogy esetleg a d) feladat sora Leibnitz-típusú. Ennek bizonyításához már csak $a_n$ monoton csökkenését kell igazolni. Nos,

$$a_n = \frac{n}{n^2 + \cos(n)} = \frac{1}{n^2 + \frac{\cos(n)}{n}} > \frac{1}{(n+1)^2 + \frac{\cos(n+1)}{n+1}} = a_{n+1}$$

hisz $\left((n+1)^2 + \frac{\cos(n+1)}{n+1}\right) - \left(n^2 + \frac{\cos(n)}{n}\right) = 2n + 1 + (\frac{\cos(n+1)}{n+1} - \frac{\cos(n)}{n}) > 2n + 1 - 2 = 2n - 1 > 0$ minden pozitív egész $n$ -re. Tehát a d) feladatban a sorösszeg létezik és értéke egy véges szám, de a sor nem *abszolút* konvergens (csak simán konvergens).

**6. feladat**

Mivel folytonos függvények szorzata és hányadosa folytonos, ezért $f$ folytonos értelmezési tartományának minden pontjában, azaz minden olyan $x$ -re, amire $x^2 - x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2, 3$. Tehát, ha $x_0 \neq -2, 3$ akkor $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (4 pont). Most már csak a $-2$ -ben és a $+3$ -ban kell megállapítani a határértéket. Ha $x = 3$, akkor $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$ tehát a véges határérték létezhet (2 pont), és a számlálóból kiemelhető egy $(x - 3)$:

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = (x - 3)(x^2 + 1)$$

(2 pont), így

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \sin(\frac{\pi}{2}x) \frac{(x-3)(x^2+1)}{(x-3)(x+2)} = \sin(\frac{3\pi}{2}) \frac{3^2+1}{3+2} = (-1)\frac{10}{5} = -2$$

(2 pont). Ha $x = -2$, akkor $\sin(\frac{\pi}{2}x) = 0$, tehát a véges határérték létezhet (2 pont). Valóban, $y := x + 2$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} f(x) &= \lim_{x \to -2} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{x+2}(x^2+1) = \lim_{y \to 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}y - \pi)}{y}((y-2)^2+1) \\ &= \lim_{y \to 0} (-1)\frac{2}{\pi} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}y)}{\frac{\pi}{2}y}((y-2)^2+1) = (-1)\frac{2}{\pi}(1)((-2)^2+1) = -\frac{10}{\pi} \end{aligned}$$

(5 pont).