VIK A1 Matematika
5. gyakorlat

I. Fölzárkózás és ismétlés: polinomosztás, Euklídeszi algoritmus

Lehet -e 4 közös gyöke a $p_1(x) = x^9 + x^7 + x^6 - x^5 - 2x^3 - x^2 - x - 1$, illetve a $p_2(x) = x^6 - x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$ képlettel definiált p_1 és p_2 polinomoknak?

II. Lineáris függetlenség, bázis, skaláris szorzat

1. Mutassuk meg, hogy az $1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3, (x-1)^4$ polinomok bázist alkotnak a legfeljebb negyedfokú polinomok terében. Mik ebben a bázisban a $p(x) = x^4$ képlettel definiált polinom koordinátái?

2. Legyen $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ két nemnulla vektor egy skalárszorzatos térben. Ha $(\mathbf{v}+3\mathbf{w})$ merőleges $(7\mathbf{v} - 5\mathbf{w})$ -re, valamint $(\mathbf{v} - 4\mathbf{w})$ merőleges $(7\mathbf{v} - 2\mathbf{w})$ -re, akkor mennyi lehet a $\mathbf{v}$ és a $\mathbf{w}$ vektorok által bezárt szög koszinusza?

3. Legyenek $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ egymással $120°$ -os szöget bezáró vektorok egy skalárszorzatos térben. Milyen $t \in \mathbb{R}$ értékekre lesz $(t\mathbf{v} + 17\mathbf{w})$ és $(3\mathbf{v} - \mathbf{w})$ merőleges, ha $\|\mathbf{v}\| = 2$ és $\|\mathbf{w}\| = 5$?

4. Legyenek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}, \tilde{\mathbf{w}}$ egy vektortér vektorai. Igazak -e a következő állítások:

a) ha mind $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w})$, mind pedig $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \tilde{\mathbf{w}})$ lineárisan független rendszerek voltak, akkor $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w} + \tilde{\mathbf{w}})$ is lineárisan független rendszer.

b) ha se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w})$, se pedig $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \tilde{\mathbf{w}})$ nem volt lineárisan független, akkor a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w} + \tilde{\mathbf{w}})$ négyes sem alkot egy lineárisan független rendszert.

5. Legyen $n > 1$ pozitív egész és $\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_n$ egységvektorok egy skalárszorzatos térben. Mutassuk meg, ha

$$\forall j \neq k : \ |\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_k| < \frac{1}{n-1},$$

akkor a $\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_n$ vektorok egy lineárisan független rendszert alkotnak.