VIK A1 Matematika
3. gyakorlat

2015. szeptember 21-25.

I. Min, Max, Inf, Sup

Legyen H a $(0, 5)$ nyílt intervallum egy kizárólag racionális számokat tartalmazó nemüres részhalmaza. Mely állítások igazak és melyek hamisak a következők közül? (Az igazakat lássuk be, a hamisakra adjunk ellenpéldát.)

- $\nexists \min(H)$,
- $\exists \inf(H) \in \mathbb{Q}$,
- $\exists \inf(H) \in \mathbb{R}$,
- $\exists \min(H) \Rightarrow \inf(H)^2 \neq 2$.

II. Polinomok algebrája

1. A p harmadfokú polinomról azt tudjuk, hogy $p(0) = p(1) = p(2) = p(3) - 5 = 0$. Határozzuk meg $p(4)$ értékét.

2. Legyen $p(x) = x^4 - 23x^2 + 18x + 40$. Mennyi p értéke az $x = 1, 2, 3, 4$ pontokban? A behelyettesítés során nyert megfigyeléseink segítségével határozzuk meg p *összes* gyökét.

3. Az x számról tudjuk, hogy kielégíti a $2 - 3x^2 = \frac{1}{x}$ egyenletet. Meg lehet -e határozni ezek alapján a $6x^7 + 5x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2x$ kifejezés értékét, és ha igen, mennyi az?

III. Komplex számok

1. Határozzuk meg a $\frac{5+6i}{(2-3i)^2}$, $(1 + i)^{18}$ és $(1 + 3i)^7(1 - 3i)^6$ komplex szám valós részét, képzetes részét, valamint abszolút értékét!

2. Határozzuk meg algebrai alakban az összes olyan z komplex számot, melyre $z^3 = -8$.

3. Határozzuk meg — lehetőleg ismét algebrai alakban — az összes olyan z komplex számot, melyre $z^2 + 1 = i(2 - z)$.

4. Tekintsük az alábbi két egyenletet:

$$i)\ \ \frac{1+i}{(z+i)^3} = (\overline{z} - i)^3, \quad ii)\ \ (\overline{z}+1)^7 = \frac{1}{\overline{z}^7} - \frac{1}{i^7}.$$

Van -e olyan z komplex szám, mely kielégíti az i), illetve van -e olyan, ami kielégíti a ii) egyenletet? Konkrét megoldásokra most nem vagyunk kiváncsiak, de az egyszerű "igen/nem" -en túl mindkét esetben *érveljünk* is a válaszunk mellett.