

VIK A1 Matematika

2. gyakorlat

2015. szeptember 14-18.

I. Halmazok, halmazműveletek

1. Legyenek A, B, C halmazok. Mely állítások igazak és melyek hamisak a következők közül? (Az igazakat lássuk be, a hamisakra adjunk ellenpéldát.)

- $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
- $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$
- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- $(A \cap B) \times (A \cap C) = (A \times A) \cap (B \times C)$
- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
- $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

2. Adjuk meg $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}(\emptyset)$ elemeit!

II. Számosság

1. Legyen A egy (nem feltétlen véges) halmaz. Mutassuk meg, hogy $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$.

2. Véges sok diszjunkt véges halmaz uniójának számossága az unióban szereplő halmazok számosságának összege. Ezt használva mutassuk meg, hogy ha A, B és C véges halmazok, akkor

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

3. Egy faluban 1000 ház van. Ezek közül 250-ben van autó, 900-ban hűtőszekrény, 950-ben TV, 990-ben rádió. Legalább hány házban van mind a négy eszköz?

4. Egy 33 fős tankörben háromféle idegen nyelven tanulnak. 20 diák tud angolul, 16 németül és 6 franciául. 5 diák tud pontosan két nyelven és két diák tud mindhárom nyelven. Hányan nem tudnak egyetlen idegen nyelven sem és hányan beszélnek pontosan egy idegen nyelvet?

III. Függvények, relációk

1. Legyen $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Q}\}$. Mutassuk meg, hogy \mathcal{R} ekvivalencia reláció.

2. Legyen $A = \{-2, -1, 1, \sqrt{2}, 2, 3, 4\}$ és $B = \{1, 2, 4, 9, 16\}$. Mutassuk meg, hogy az i) és az ii) esetben is \mathcal{R} egy függvényszerű reláció A és B között, valamint mindkét esetben határozzuk meg az $f = (A, B, \mathcal{R})$ függvény értelmezési tartományát, és vizsgáljuk meg f injektívitasát és szürjektívitasát!

i) $\mathcal{R} = (A \times B) \cap \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\},$

ii) $\mathcal{R} = (A \times B) \cap \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$