VIK A1 Matematika
14. gyakorlat

2015. december 7 - december 11.

I. L'Hopital-szabály

1. A L'Hopital-szabáy segítségével (vagy bárhogy máshogy) határozzuk meg a következő határértékeket:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x(\cos(x)-1)}$,

b) $\lim_{x\to +\infty} \ln(x)\sin(\frac{1}{x})$,

c) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$,

d) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\ln(x)}$.

II. Impliciten megadott függvény deriválása, magasabb deriváltak használata

1. Az $y^3 - x^3 + 3y - x = 1$ görbéhez érintőt húzunk a $(0,0)$ pontból. Mutassuk meg: az érintési pont rajta lesz az $6y - 2x = 3$ egyenesen.

2. Legyen $0 < x_1 < x_2$. Eldönthető -e ennyiből, hogy mi a nagyobb (és ha igen, mi a válasz): x_1 és x_2 átlagának logaritmusa, vagy logaritmusaik átlaga?

3. Milyen c valós paraméter esetén lesz az $x\ln(y) + cy\ln(x) = 1$ görbének lokális szélsőértéke $x = 1$ -nél, és mi ekkor a szélsőérték típusa?

III. Határozatlan integrálás

1. Legyen f, F egy diffható függvények, és legyen $F' = f$ (azaz F az f -nek egy *primitivfüggvénye*), α, β pedig konstansok. Ekkor a deriválási szabályok alkalmazásával

- ha $\alpha \neq 0$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{a}F(\alpha x + b) = F'(\alpha x + \beta) = f(\alpha x + \beta)$, azaz

$$\int f(\alpha x + \beta)\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C,$$

- ha $\alpha \neq -1$ és f^α értelmezett (pl. mert α egész kitevő vagy mert $f > 0$), akkor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\alpha+1}f^{(\alpha+1)}(x) = f^\alpha(x)f'(x)$, azaz

$$\int f^\alpha(x)f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}f^\alpha(x) + C,$$

- mivel mind $x > 0$, mind pedig $x < 0$ esetén $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(|x|) = \frac{1}{x}$, ezért az előbbi szabály $\alpha = -1$ esetén így módosul:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C,$$

- ha g egy szintén diffható függvény, akkor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$, azaz

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = F(g(x)) + C.$$

A fönti egyszerű felismerések segítségével számoljuk ki a következő határozatlan integrálokat:

a) $\int \frac{1}{2+3x^2}\mathrm{d}x$,	b) $\int \frac{\ln^2(x)}{x}\mathrm{d}x$,	c) $\int \frac{\sin(\ln(x))}{x}\mathrm{d}x$,
d) $\int \cos^3(x)\mathrm{d}x$,	e) $\int \frac{1}{3x^2+6x+5}\mathrm{d}x$,	f) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x$,
g) $\int \sin^2(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x$,	h) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$,	i) $\int \sqrt{x^4+x^2}\mathrm{d}x$.

2. Parciális integrálás segítségével számoljuk ki a következő integrálokat:

a) $\int x^2\sin(2x)\mathrm{d}x$,	b) $\int \sin^2(x)e^x\mathrm{d}x$,	c) $\int \ln(x)\mathrm{d}x$,
d) $\int \mathrm{actan}(x)\mathrm{d}x$,	e) $\int \ln^3(x)\mathrm{d}x$,	f) $\int x\arctan(x)\mathrm{d}x$.