VIK A1 Matematika
1. gyakorlat

2015. szeptember 7-11.

I. Teljes indukció

Bizonyítsuk be, hogy minden $n = 1, 2, \ldots$ természetes számra

- $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
- $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$,
- $\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$,
- $\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1$.

II. Logikai jelek és műveletek

1. Igazságtábla segítségével bizonyítsuk a *De Morgan*-azonosságokat:

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q, \quad \text{illetve} \quad \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q.$$

2. Igazságtábla segítségével igazoljuk, hogy a $\wedge$ és $\vee$ disztributívak egymás fölött.

3. Írjuk fel az alábbi állítások tagadását:

- minden ajtón van kilincs,
- $\forall$ emeleten $\forall$ ablak nyitva van,
- a VIK bármely szak minden évfolyamán van lány hallgató.

III. Egyenlőtlenségek, egyenletrendezés

1. Emlékezetből írjuk föl az $a_1, a_2 \ldots a_n$ pozitív számok harmónikus, számtani és mértani közepei közötti egyenlőtlenségeket, valamint bizonyítsuk az alábbiakat:

- $|x+y| \leq |x| + |y|$,
- $||x| - |y|| \leq |x-y|$
- $n2^{(n-1)/2} < 2^n - 1 \ \ (n = 2, 3, \ldots)$
- $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n$,

2. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok körében! A két egyenletnek ugyanazok a megoldásai?

i) $2x + \sqrt{(2x-1)x^2} = x^2$,

ii) $2x - \sqrt{(2x-1)x^2} = x^2$.