III.

AZ IGAZSÁG FOGALMA A FORMALIZÁLT NYELVEKBEN*

BEVEZETÉS

A jelen munkát csaknem teljesen egyetlen kérdésnek szenteljük, éspedig az *igazság definíciója problémájának;* ennek lényege az, hogy – valamely nyelv tekintetében – megalkossuk *az „igaz mondat" kifejezés tartalmilag helytálló és formailag szabatos definícióját.* Ez a probléma, amelyet a filozófia klasszikus kérdései között tartanak számon, jelentős nehézségeket okoz. Bár az „igaz mondat" kifejezés jelentése a köznyelvben igen világosnak és érthetőnek látszik, e jelentés pontosabb meghatározására irányuló minden eddigi kísérlet eredménytelen maradt, és számos vizsgálódás, amelyben ezt a kifejezést használták és amely látszólag kézenfekvő premisszákból indult ki, gyakran paradoxonok-

* Az eredeti tanulmány 1933-ban jelent meg lengyelül (lásd az Irodalomjegyzékben Tarski 1933a alatt). Utószóval bővített német változata: *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen* (Tarski 1935a). A fordítás forrása: Berka & Kreiser 1983, 445–546., valamint Tarski 1956b, 152–278. *(The concept of truth in formalized languages).* A Bevezetést és az 1., 2., 3. §-t *Máté András*, a hátralévő részt *Ruzsa Imre* fordította.

hoz és antinómiákhoz vezetett (melyekre egyébként lehetett többé-kevésbé megnyugtató megoldást találni). Az igazság fogalma ebben a tekintetben osztozott más, a nyelv ún. szemantikájához tartozó analóg fogalmak sorsában.

Azt a kérdést, hogy hogyan kell ezt vagy azt a fogalmat definiálni, csak akkor tehetjük fel szabatosan, ha megadunk egy jegyzéket azokról a kifejezésekről, amelyeket igénybe akarunk venni a kívánt definíció felépítéséhez; ha az a célunk, hogy a definíció betöltse tulajdonképpeni feladatát, akkor a jegyzékben szereplő kifejezések értelmét illetően semmiféle kétségnek sem szabad támadnia. Természetszerűleg vetődik fel tehát az a kérdés, hogy milyen kifejezéseket akarunk használni az igazság definíciójának megalkotásához. Vizsgálódásaink során a későbbiekben nem fogom elmulasztani, hogy ezt megvilágítsam; mindenesetre a definíció megalkotásának folyamán nem fogok egyetlen szemantikai fogalmat sem használni, hacsak előzőleg nem sikerült más fogalmakra visszavezetnem.

Nem célunk itt az „igaz" kifejezés mindennapi életünkben szokásos jelentésének mélyreható elemzése; bizonyára minden olvasónak megvan a maga kisebb vagy nagyobb mérvű intuitív ismerete az igazság fogalmáról, behatóbb tárgyalását pedig megtalálhatja számos ismeretelméleti munkában. Csak annyit szeretnék megemlíteni, hogy az egész munka során kizárólag az igazság ún. „klasszikus" felfogásában rejlő intenciók kibontásáról van szó („igaz – a valósággal megegyező"), ellentétben pl. az „utilitárius" felfogással („igaz – bizonyos tekintetben hasznos").[1]

[1] Vö. Kotarbiński 1926, 126. (Ezt a művet jelen munkám megírása során ismételten felhasználtam, és sok helyen átvettem terminológiáját.)

Definiálandó fogalmunk terjedelme lényegesen függ attól a nyelvtől, amely megfontolásaink tárgyát képezi: ugyanaz a kifejezés lehet az egyik nyelven igaz, a másikon hamis mondat vagy éppen értelmetlen kifejezés. A vizsgált terminus valamiféle egyetemes és egyetlen jelentéséről itt egyáltalán nem lesz szó: a kitűzött probléma széttagozódik az egyes nyelveket illető, egymástól elkülönülő problémák sorává.

Az 1. §-ban megfontolásaink tárgya a köznyelv. Ezeknek a megfontolásoknak a végeredménye teljességgel negatív: a köznyelv tekintetében nemcsak hogy az igazságfogalom definíciója, de még következetes és a logika törvényeivel összhangban lévő használata is lehetetlennek tűnik.

Az értekezés további részében kizárólag azokat a nyelveket veszem tekintetbe, amelyek a ma ismertek közül egyedül tekinthetők tudományos módszerekkel felépítetteknek, ti. a deduktív tudományok formalizált nyelveit; ezek jellemzését a 2. § elején adom meg. Eredményül azt kapjuk, hogy problémánk szempontjából ezek a nyelvek nagyjából-egészében két nagy csoportra tagolódnak, s ebben a felosztás alapja az, hogy a nyelv a nyelvtani formák kisebb vagy nagyobb készletével rendelkezik-e. A „szegényebb" nyelvek tekintetében az igazság definíciójának problémájára pozitív megoldást találunk: létezik olyan egységes módszer, amely ezekhez a nyelvekhez külön-külön lehetővé teszi a kívánt definíció megalkotását. Ezt a 2. és 3. §-ban egy konkrét nyelv tekintetében teljes pontossággal végbe fogom vinni, hogy ily módon megkönnyítsem a magam számára az említett módszer általános leírását, amelyet a 4. §-ban vázolok. A „gazdagabb" nyelvek tekintetében azonban – mint ez az 5. § vizsgálataiból következik – problémánk megoldása

negatív lesz: az ebbe a csoportba tartozó nyelvekhez soha nem alkothatjuk meg az igazságfogalom szabatos definícióját.[a] Azonban határozottan minden amellett szól, hogy – a köznyelvvel ellentétben – az igazságfogalom következetes és helyénvaló használatát ezekben az esetekben is be lehet vezetni, éspedig úgy, hogy egy sajátos tudomány, nevezetesen az igazság elmélete alapfogalmaként fogjuk fel, és alapvető tulajdonságait axiomatikus módszerrel adjuk meg pontosan.

A formalizált nyelvek vizsgálata természetszerűleg megköveteli a modern formális logika alapjainak ismeretét. Az igazság definíciójának megalkotásához ezenkívül – habár igen szerény mértékben – szükség van bizonyos tisztán matematikai fogalmakra és módszerekre. Örömömre szolgálna, ha jelen munkám meggyőzné az olvasót, hogy az a fegyverzet, amelyet ezek a segédeszközök képeznek, már ma is nélkülözhetetlen még tisztán filozófiai problémák vizsgálatánál is.[2]

1. §. AZ IGAZ MONDAT FOGALMA A KÖZNYELVBEN

Abból a célból, hogy az olvasót bevezessem vizsgálódásaink körébe, kívánatosnak tűnik az igazságdefiníció problémájának megvizsgálása – hacsak futólagosan is – a *köznyelv*

[a] Ezen állítás korrekcióját illetően lásd az Utószót.

[2] Ezt a munkát J. Łukasiewicz 1931. március 21-én Varsóban előterjesztette a Tudományos Társaságnak. A benne található eredmények nagyrészt az 1929. évből származnak, ezekről többek közt két elő-

tekintetében. Itt elsősorban azokat a különféle nehézségeket szeretném kiemelni, amelyekkel a feladat megoldására tett kísérleteink során találkozunk.[3]

A köznyelvi állítások tekintetében az igazság szabatos definiálását célzó sokféle törekvés közül bizonyosan az a kísérlet tűnik a legtermészetesebbnek, hogy *szemantikai definíciót* adjunk. Olyanféle definícióra gondolok, amelyet első nekifutásra a következőképpen öntenénk szavakba:

(1) *Igaz mondat az olyan mondat, amely azt mondja, hogy a dolgok így és így állnak, és a dolgok valóban így és így állnak.*[4]

adásban is beszámoltam, amelyeket „Az igazság fogalmáról formalizált deduktív rendszerek tekintetében" címmel a Filozófiai Társaság logikai szekciójában Varsóban (1930. október 8.) és a Lengyel Filozófiai Társaságban Lwówban (1930. december 15.) tartottam, és amelyek kivonata a *Ruch Filozoficzny* folyóirat XII. kötetében jelent meg. A munka kinyomtatása tőlem független okokból jelentősen elhúzódott; ez egyébként lehetővé tette számomra, hogy a szöveget kiegészítsem eléggé fontos eredményekkel (vö. 88. jegyzet). A közbeeső időben a fő eredmények kivonatát publikáltam a TARSKI 1932c közleményben.

[3] Az ide csatlakozó megjegyzések legnagyobbrészt nem saját vizsgálódásaim eredményei. Azok a nézetek jutnak bennük kifejezésre, melyeket St. Leśniewski fejtett ki a varsói egyetemen tartott előadásaiban (az 1919/20-as tanévtől kezdve), tudományos vitákban és magánbeszélgetésekben; különösképpen vonatkozik ez majdnem mindenre, amit az idézőjelek közt álló kifejezésekről és a szemantikai antinómiákról mondani fogok. Talán fölösleges hozzátenni, hogy Leśniewskit semmiféle felelősség nem terheli azért a vázlatos és bizonyára nem egészen pontos formáért, amelybe a következő megjegyzéseket öntöttem.

[4] Hasonló megfogalmazásokat találunk KOTARBIŃSKI 1926, 127. és 136., ahol ezeket a szerző kommentárokként kezeli, amelyek közelebbről megmagyarázzák az igazság „klasszikus" felfogásának lényegét.

A formai szabatosság, a világosság és a benne szereplő kifejezések egyértelműsége tekintetében a fenti megfogalmazás nyilvánvalóan sok kívánnivalót hagy maga után. De a megfogalmazás szemléletes értelme és általános szándéka ezzel együtt igen világosnak és érthetőnek tűnik; egy szemantikai definíciónak éppen az volna a feladata, hogy ezt a szándékot pontosan és szabatos formában fejezze ki.

Kiindulópontul bizonyos speciális jellegű mondatok kínálkoznak, amelyek megfelelhetnek, mint egy-egy állítás igazságának részleges definíciói, vagy jobban mondva, mint az „*x* igaz mondat" típusú különféle konkrét beszédfordulatok magyarázatai. Az ilyen fajtájú mondatok általános sémája a következőképpen ábrázolható:

(2) *x igaz mondat akkor és csak akkor, ha p.*

Konkrét meghatározásokat úgy nyerünk, ha ebben a sémában a ‚*p*' szimbólum helyére valamilyen mondatot, az ‚*x*' helyére pedig ennek a mondatnak egy tetszőleges megnevezését helyettesítjük.

Ha adott egy mondat valamely megnevezése, akkor alkothatunk hozzá egy (2) típusú magyarázatot, hacsak lehetséges idézni a név jelölte mondatot. E feltételt kielégítő nevek legfontosabb és leggyakoribb kategóriáját az ún. *idézetnevek* alkotják. Ezzel a terminussal jelöljük ti. egy mondat

Persze, ezek a fogalmazások nem igazán újak. Hasonlítsuk össze pl. Arisztotelész jól ismert szavaival: „Hamis az, amikor azt mondjuk arról, ami van, hogy nincs, vagy amikor arról, ami nincs, azt mondjuk hogy van; igaz pedig az, amikor azt mondjuk arról, ami van, hogy van, vagy amikor arról, ami nincs, azt mondjuk, hogy nincs." (*Metafizika*, Γ, 1011b, 27.)

(vagy bármely más, akár értelmetlen kifejezés) azon nevét, amely (bal és jobb oldali) idézőjelekből és a köztük elhelyezkedő azon kifejezésből áll, amelyet éppen meg akarunk nevezni a szóban forgó névvel. Példaként szolgálhat egy mondat ilyen idézetnevére, mondjuk, az „ ‚esik a hó' " név, a megfelelő (2) típusú magyarázat ebben az esetben így szól:

(3) *‚esik a hó' akkor és csak akkor igaz mondat,*
ha esik a hó.[5]

A megnevezések egy másik olyan kategóriáját, amelyhez hasonló magyarázatokat tudunk alkotni, az ún. *strukturális-leíró nevek* képezik. Így fogjuk hívni azokat a neveket,

[5] A mondatokat (kijelentéseket) itt meghatározott fajtába tartozó kifejezésekként, azaz nyelvi képződményekként kezeljük. Ha azonban a ‚kifejezés', ‚mondat' stb. terminusokat konkrét írásjelsorozatok neveként értelmezzük, akkor számos megfogalmazás, amely jelen munkában található, nem tűnik egészen helyesnek, és az egyező alakú kifejezések azonosítása elterjedt hibájának látszatát kelti. Ez különösképpen a (3) mondatra vonatkozik, hiszen az említett értelmezés mellett az idézetneveket nem egyedi, hanem köznevekként kell kezelni, amelyek az idézőjelek közt álló jelsorozat mellett minden, vele egyező alakú jelsorozatot is jelölnek. Hogy elkerüljük az ilyesfajta szemrehányásokat, és emellett ne vigyünk megfontolásainkba olyan felesleges bonyodalmakat, mint amelyek többek közt az egyezőalakúság fogalmának használatával járnak, kényelmes, ha leszögezzük, hogy a ‚szó', ‚kifejezés', ‚mondat' stb. terminusok soha nem konkrét jelsorozatokat jelölnek, hanem olyan jelsorozatok teljes osztályait, amelyek az adott jelsorozattal egyező alakúak. Csak ebben az értelemben fogjuk az idézetneveket kifejezések tulajdonneveként tárgyalni. Vö. ehhez Whitehead & Russell 1925, I. köt. 661–666., és – ha a ‚mondat' terminus más értelmezéseiről van szó – Kotarbiński 1926, 123–125. Élve az alkalommal, megjegyzem, hogy a ‚név' és ‚jelöl' szavakat (a

amelyek azt írják le, hogy a név jelölte kifejezés mely szavakból, minden egyes szó pedig milyen jelekből áll, és ezek a jelek és szavak milyen sorrendben követik egymást. Ilyen neveket idézőjelek segítségül vétele nélkül képezhetünk. Erre a célra be kell vezetnünk az általunk használt nyelvbe, jelen esetben tehát a köznyelvbe, minden egyes betű és bármiféle egyéb jel számára, amely a nyelv szavaiban vagy kifejezéseiben előfordul, valami olyan tulajdonnevet, amely nem idézetnév, így pl. az ‚a', ‚e', ‚f', ‚j', ‚p', ‚x' betűk neveként az ‚A', ‚E', ‚Ef', ‚Jé', ‚Pé', ill. ‚Iksz' megjelölések jönnek tekintetbe. Világos, hogy ezek után minden idézetnévhez hozzárendelhetünk egy olyan strukturális-leíró nevet, amely idézőjelek nélkül épül fel, és vele azonos terjedelmű (azaz ugyanazt a kifejezést jelöli) és fordítva, így pl. a „ ‚hó' " névnek ez a név felel meg: ‚olyan szó, amely két egymásra következő betűből: Há és Ó áll'. Belátható az is, hogy a mondat strukturális-leíró nevére is képezhetünk (2) típusú részdefiníciókat. Ez látható a következő példából:

(4) *olyan kifejezés, amely három szóból áll, ezek*
közül az első négy egymásra következő betűből:
E, Es, I és Ká, a második egy betűből: A, a
harmadik pedig két egymásra következő betűből:
Há és Ó áll, akkor és csak akkor igaz mondat,
ha esik a hó.

‚tárgy', ‚osztály', ‚reláció' szavakhoz hasonlóan) nem egy, hanem több különböző értelemben használom, amennyiben szűkebb értelemben vett tárgyakra (azaz individuumokra) és mindenféle osztályra, relációra stb. egyaránt alkalmazom. A Whitehead & Russell 1925-ben (I. köt. 39–68.) megalapozott típuselmélet nézőpontjából ezeket a kifejezéseket „szisztematikusan többértelműeknek" kellene neveznünk.

Úgy tűnik, a (3)-mal vagy (4)-gyel analóg mondatok nyilvánvalóak és teljesen egybevágnak az ‚igaz' szónak azzal a jelentésével, amely az (1) megfogalmazásban jut kifejezésre. Nem ébresztenek általában semmiféle kételyt tartalmuk világossága és formájuk szabatossága tekintetében sem (persze csak akkor nem, ha feltesszük, hogy azok a mondatok, amelyeket (2)-ben a ‚*p*' szimbólum helyére teszünk, semmi ilyesfajta kételyt nem ébresztenek).

Itt azonban szükséges egy bizonyos korlátozás. Ismeretesek olyan szituációk, amelyekben éppen ilyen típusú kijelentések, ha összekapcsoljuk őket más, szemléletesen nem kevésbé nyilvánvaló premisszákkal, nyílt ellentmondáshoz vezetnek, éspedig az ún. *hazug antinómiájához*. Ezt az antinómiát egy J. Łukasiewicztől származó, a lehetőség határáig egyszerű formában adjuk meg.

A nagyobb áttekinthetőség kedvéért a ‚*c*' szimbólumot az ‚az ezen az oldalon, felülről a 20. sorban található mondat' kifejezés tipográfiai rövidítéseként fogjuk használni. Tekintsük tehát a következő mondatot:

c nem igaz mondat.

Ha tekintetbe vesszük a ‚*c*' szimbólum jelentését, empirikusan megállapíthatjuk, hogy

(α) ‚*c nem igaz mondat' azonos c-vel.*

A *c* mondat idézetnevére (vagy bármely másik tulajdonnevére) felállítunk egy (2) típusú magyarázatot:

(β) ‚*c nem igaz mondat' igaz mondat akkor és csak akkor, ha c nem igaz mondat.*

Az (α) és (β) premisszák azonnal ellentmondásra vezetnek:

c igaz mondat akkor és csak akkor, ha c nem igaz mondat.

Ennek az ellentmondásnak a forrását könnyen felfedezhetjük: a (β) állítás megszerkesztéséhez a (2) sémában a ‚*p*' szimbólum helyére olyan kifejezést helyettesítettünk be, amely maga is tartalmazza az „igaz mondat' terminust (minek következtében az így nyert állítás – ellentétben pl. (3)-mal vagy (4)-gyel – nem szolgálhat az igazság részdefiníciójaként). Nem tudunk azonban olyan értelmes indokot adni, amellyel az ilyen helyettesítéseket elvileg megtilthatnánk.

Most csak a fenti antinómia megfogalmazására szorítkozom, a szükséges következtetések levonását ebből a tényből a későbbiekre tartom fenn. Eltekintve ettől a nehézségtől, először is megkísérlem megalkotni az igaz kijelentés egy definícióját a (3) típusú meghatározások általánosítása útján. Ez a feladat első pillantásra egészen egyszerűnek tűnhet – különösen azok számára, akik valamelyest ismerik a modern matematikai logika eszköztárát. Azt gondolhatnák, hogy ha (3)-ban az ott két ízben előforduló ‚*esik a hó*' kifejezést tetszőleges mondatváltozóval (azaz olyan szimbólummal, amelyet tetszőleges mondattal behelyettesíthetünk) pótoljuk, továbbá kimondjuk, hogy az így nyert formula a változó minden értékére igaz, minden további nélkül megkapunk egy mondatot, amely speciális esetként átfogja az összes (3) típusú állítást:

(5) *tetszőleges p-re – ‚p' akkor és csak akkor igaz mondat, ha p.*

A fenti mondat már csak azért sem szolgálhat az ‚*x* igaz mondat' kifejezés általános definíciójául, mert az ‚*x*' szimbólum lehetséges behelyettesítéseinek összességét itt az idézetnevekre korlátoztuk. Ennek a korlátozásnak az elhárítása céljából arra a jól ismert tényre kellene hivatkoznunk, hogy minden igaz mondatnak (és egyáltalában minden mondatnak) megfelel egy idézetnév, amely éppen az illető mondatot jelöli.[6] Erre a tényre alapozva megkísérelhetnénk az (5) megfogalmazás általánosítását, pl. a következő módon.

(6) *tetszőleges x-re — x igaz mondat, akkor és csak akkor, ha van olyan p, hogy x azonos ‚p'-vel és emellett p.*

Első pillantásra talán hajlanánk arra, hogy a (6) tételt az ‚igaz mondat' kifejezés szabatos szemantikai definíciójának tekintsük, amely egzakt formában valósítja meg az (1) megfogalmazásban kifejezett szándékot, és ennek folytán elismerjük kitűzött problémánk megnyugtató megoldásaként. Azonban alapjában véve a dolog egyáltalán nem ilyen egyszerű: mihelyt nekikezdünk az (5)-ben és (6)-ban fellépő idézetnevek jelentésének elemzéséhez, nehézségek és veszélyek egész sorát fogjuk észlelni.

Az idézetnevek úgy kezelhetők, mint egy nyelv önálló szavai, azaz mint szintaktikailag egyszerű kifejezések; az ilyen nevek egyes alkotórészei — az idézőjelek és az idézőjelek közötti kifejezések — ugyanazt a szerepet töltik be, mint a betűk vagy az egymásra következő betűkből álló

[6] Ezt a tényt pl. a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

(5') *tetszőleges x-re — ha x igaz mondat, akkor — valamely p-re — x azonos ‚p'-vel.*

Az (5) és (5') premisszákból az alább említendő (6) mondat konklúzióként levezethető.

komplexumok az egyes szavakban, tehát ebben az összefüggésben semmiféle önálló jelentésük nincsen. Ezek szerint minden idézetnév állandó tulajdonneve egy bizonyos kifejezésnek (ti. az idézőjelek által közrefogott kifejezésnek), éspedig ugyanolyan jellegű neve, mint az emberek tulajdonneve; így pl. a „ ‚*p*' " név az ábécé betűinek egyikét jelöli. Ezen értelmezés mellett, amely egyébiránt a legtermészetesebbnek tűnik, és teljességgel megfelel az idézőjelek szokásos használati módjának, a (3) típusú részdefiníciók alkalmatlanok bármiféle értelmes általánosításra. A legkevésbé sem tekinthető ilyen általánosításnak az (5), ill. a (6), ha ugyanis (5)-re alkalmazzuk az ún. helyettesítési szabályt, nincs jogunk arra, hogy az idézetnév alkotórészeként fellépő ‚*p*' betű helyére valamit behelyettesítsünk (éppúgy, mint ahogy az sem megengedett, hogy az ‚igaz' szóban az ‚i' betű helyére behelyettesítsünk valamit). Ennek következtében konklúzióként nem (3)-at kapjuk meg belőle, hanem a következő kijelentést: ‚*p*' *igaz mondat, akkor és csak akkor, ha esik a hó*. Ebből látható, hogy az (5) és (6) mondat nem azoknak a gondolatoknak a megfogalmazásai, amelyeket ki szerettünk volna fejezni, sőt nyilvánvalóan értelmetlenek. Az (5) mondat ráadásul azonnal ellentmondáshoz vezet, mivel belőle a most megadott következmény mellett éppoly könnyen levezethető az ellentmondó következmény is: ‚*p*' *igaz mondat akkor és csak akkor, ha nem esik a hó.* A (6) önmagában nem vezet ugyan ellentmondáshoz, de az a nyilvánvalóan abszurd következmény adódik belőle, mely szerint a ‚*p*' betű lenne az egyetlen igaz kijelentés.

Hogy a fenti okfejtést világosabbá tegyük, még hozzáfűzzük azt a megjegyzést, hogy e felfogásban az idézetnevek teljességgel kiküszöbölhetőek a nyelvből, és helyettesíthetők pl. a megfelelő strukturális-leíró nevekkel. Ha azonban az ilyen nevek számára konstruált (2) típusú magyarázatokat vizsgáljuk, pl. (4)-et, nem látunk semmilyen utat, amely ezeknek a magyarázatoknak az általánosításához vezet; ha viszont (5)-ben vagy (6)-ban az idézetnevet a ‚Pé' (ill. ‚*az a szó, amely egyedül a Pé betűből áll*') strukturális-leíró névvel helyettesítjük, akkor az így nyert megfogalmazások értelmetlensége rögtön szembeötlik.

Hogy az (5) és (6) mondatok értelmét megmentsük, az idézetneveknek egy egészen más értelmezéséhez kell nyúlnunk. Most ezeket a neveket szintaktikailag összetett kifejezésekként kell kezelnünk, amelyeknek szintaktikai alkotórészei mind az idézőjelek, mind a közöttük álló kifejezések. Ebben az esetben nem minden idézetkifejezés konstans név: pl. az (5)-ben és (6)-ban előforduló „‚*p*'" kifejezést olyan függvénynek kell tekintenünk, amelynek argumentuma egy kijelentésváltozó, értékei pedig kijelentések konstans idézetnevei; az ilyen függvényt *idézetfüggvénynek* fogjuk mondani. Az idézőjelek ezáltal a szemantika területének önálló szavaivá válnak, amelyek jelentésüket tekintve közel állnak a ‚név' szóhoz, szintaktikai tekintetben pedig funktorok szerepét játsszák.[7] Ezáltal újabb bonyodalmak állnak elő. Az idézetfüggvénynek és maguknak az idézőjeleknek a jelentése nem elég világos. Ezek semmi esetre sem extenzionális funktorok: a „*tetszőleges p-re és q-ra – feltéve, hogy p akkor és csak akkor, ha q*, ‚*p*' *azonos* ‚*q*'-*val*" kijelentés kétségtelenül éles ellentmondásban van az idézőjelek szokásos használatával. A (6) definíció már csak ezért is elfogadhatatlan volna mindazok számára, akik következetesen el kívánják kerülni intenzionális funktorok használatát, sőt azon a véleményen vannak, hogy mélyebb elemzés szerint az ilyen funktoroknak lehetetlen pontos értelmet tulajdonítani.[8] Az idézetfüggvény használata ezenkívül annak a veszélynek is kitesz bennünket, hogy különféle szemantikai antinómiákba, pl. a hazug antinómiájába bonyolódunk. Ez még abban az esetben is így van, ha – messzemenő elővigyázattal eljárva – az említett függvényeknek csak a szinte magától értetődőnek látszó tulajdonságait használjuk ki. Ugyanis ha bevezetjük a változó argumentumú idézetfüggvényeket, akkor a hazug antinómiáját meg lehet fogalmazni úgy is, hogy – ellentétben az antinómia fentebb megismert változatával – egyáltalán nem használjuk az „igaz" kifejezést. Adjunk meg egy vázlatot ehhez a megfogalmazáshoz.

Legyen a ‚*c*' szimbólum az ‚*a 69. oldalon felülről a*

[7] Funktoroknak nevezzük az olyan szavakat, mint ‚olvas' az ‚*x* olvas' kifejezésben (mondatképző funktor, melynek argumentuma *egy* individuumnév), ‚látja' az ‚*x* látja *y*-t' kifejezésben (mondatképző funktor *két* argumentummal), ‚apja' az ‚*x*-nek az apja' kifejezésben (névképző funktor *egy* névargumentummal), ‚vagy' a ‚*p* vagy *q*' kifejezésben (mondatképző funktor *két* mondatargumentummal); az idézőjelek példát szolgáltatnak nevet képező funktorra egy mondatargumentummal. A ‚funktor' terminus T. Kotarbińskitől származik, a ‚mondatképző funktor' és ‚névképző funktor' terminusok pedig K. Ajdukiewicztől; vö. AJDUKIEWICZ 1928, 16. és 17.

[8] Az extenzionalitás súlyos problémáját nem fogom itt közelebbről vizsgálni; vö. ehhez a kérdéshez CARNAP 1929, amely megadja a probléma irodalmát, és különösen WHITEHEAD & RUSSELL 1925, I. köt. 659–666. Vegyük észre, hogy az ‚extenzionális' és ‚intenzionális' terminusokkal rendszerint a mondatképző funktorokat jelöljük, ezzel szemben a szövegben az idézőjelekre, tehát nevet képező funktorokra alkalmazzuk őket.

3 – 4. *sorban olvasható mondat*' kifejezés tipográfiai rövidítése. Tekintsük a következő mondatot:

tetszőleges p-re – ha c azonos a ‚p' mondattal, akkor nem p.

(Ha elfogadjuk (6)-ot mint az igazság definícióját, akkor a fenti állítás azt mondja, hogy *c* nem igaz mondat.)

Empirikusan megállapítjuk:

(α') *a „tetszőleges p-re – ha c azonos a ‚p' mondattal, akkor nem p" mondat azonos c-vel.*

Ezenkívül csak egyetlen kiegészítő feltevéssel élünk, amely az idézetfüggvényre vonatkozik, és úgy tűnik, semmiféle kételyt nem ébreszt:

(β') *tetszőleges p-re és q-ra – ha a ‚p' mondat azonos a ‚q' mondattal, úgy p akkor és csak akkor, ha q.*

Az (α') és (β') premisszákból a logika elemi törvényeinek segítségével könnyen levezethetünk egy ellentmondást.[b]

[b] Vegyük figyelembe, hogy a ‚*c*' jel egy állítás megnevezése alkalmi leírással. Ugyanezt az állítást idézetnévvel is megnevezhetjük. Ekkor az (α') azonosság ilyen alakot ölt:

(α'') $$„\forall p[(‚A' = ‚p') \supset \sim p]" = „A",$$

ahol »„*A*"« a *c* állítás idézetnevét reprezentálja. Alkalmazva a (β') alatti föltevést, kiküszöbölhetjük az idézőjeleket:

(α''') $$\forall p[(A \equiv p) \supset \sim p] \equiv A.$$

Az állításlogika törvényei szerint „$(A \equiv p) \supset \sim p$" logikailag ekvivalens „$\sim A$"-val, bármi legyen is *p* értéke; így (α''') tovább egyszerűsíthető:

$$\sim A \equiv A;$$

és ez valóban logikai ellentmondás.

Csak mellékesen hívnám fel a figyelmet még további veszélyekre, amelyeknek az idézőjelek fenti értelmezésének következetes alkalmazása tesz ki bennünket. Egyrészt bizonyos kifejezések többértelműek lesznek (így pl. az (5)-ben és (6)-ban fellépő idézetkifejezést bizonyos helyzetekben változó argumentumú függvénynek kell tekintenünk, más esetekben viszont konstans név, amely az ábécé egyik betűjét jelöli).[c] Másrészt meg kell engednünk bizonyos olyan nyelvi konstrukciókat, amelyekről legalábbis kétséges, hogy megfelelnek-e a szintaxis alaptörvényeinek, pl. olyan értelmes kifejezéseket, amelyek értelmetlen kifejezéseket tartalmaznak szintaktikai alkotórészként (például szolgálhat erre valamely értelmetlen kifejezés idézetneve). – Mindezen okoknál fogva úgy tűnik, hogy a (6) definíció helyessége még az idézőjelek új felfogása esetén is erősen megrendül.

Az eddigi megfontolások mindenesetre feljogosítanak bennünket arra a megállapításra, hogy *az ‚igaz mondat' kifejezés szabatos szemantikai definíciójának felépítési kísérlete lényegbevágó nehézségekbe ütközik.* Még olyan általános módszert sem ismerünk, amely lehetővé tenné számunkra, hogy pontosan megragadjuk bármely olyan „*x* igaz mondat" alakú konkrét kifejezés jelentését, ahol ‚*x*' helyén egy mondat valamely megnevezése áll. A (3) és (4) példákkal szemléltetett módszer cserbenhagy bennünket olyan helyzetekben, amikor egy mondat nevéhez nem tudjuk felmutatni a név jelölte állítást (példaként szolgálhat ilyen

[c] Ez a zavar elhárítható, ha különböző típusú idézőjeleket használunk az idézetnevekben és az idézetfüggvényekben, és megállapodunk abban, hogy az idézetfüggvényekben szereplő változók csakis idézetnevekkel helyettesíthetők be.

névre mondjuk ,az első állítás, amelyet a 2000. évben ki fognak nyomtatni'); ha azonban ilyen esetekben ahhoz a konstrukcióhoz kívánnánk menekülni, amelyet a (6) definíció megfogalmazásakor alkalmaztunk, akkor kitennénk magunkat mindazoknak a bonyodalmaknak, melyekről fentebb szó volt.

A tények ilyen állása mellett felötlik az a gondolat, hogy problémánk megoldása végett más eszközökhöz nyúljunk. Itt csak *egy* ilyen típusú kísérletre kívánom felhívni a figyelmet, éspedig arra, hogy *strukturális definíciót* konstruáljunk. Ennek a definíciónak általános sémáját nagyjából a következőképpen ábrázolhatjuk: *igaz mondat az olyan mondat, amelynek ilyen és ilyen strukturális tulajdonságai* (azaz a kifejezés egyes alkotórészeinek alakjára és egymásra következésére vonatkozó tulajdonságai) *vannak, vagy amelyet strukturálisan így és így leírható kifejezésekből ezeknek és ezeknek a strukturális átalakításoknak a segítségével kaphatunk.* Itt kiindulópontként szolgálhat számos, a formális logikából merített törvény, amely megengedi, hogy a mondat bizonyos strukturális tulajdonságaiból igaz, ill. nem igaz voltára vagy bizonyos mondatok igaz, ill. nem igaz voltából más, az adott mondatokból ilyen és ilyen strukturális átalakítással nyerhető mondatok analóg tulajdonságaira következtessünk. Íme néhány triviális példa ilyen törvényekre: *minden kifejezés, amely négy részből áll, melyek közül az első a ,ha' szó, a harmadik az ,akkor' szó, a második és a negyedik pedig ugyanaz a mondat, igaz mondat; ha egy igaz mondat négy részből áll, melyek közül az első a ,ha' szó, a második egy igaz mondat, a harmadik pedig az ,akkor' szó, akkor a negyedik rész is igaz mondat.* Az ilyen törvényeknek – különösen a második típusúaknak – igen nagy

horderejük van: ezek segítségével lehet pl. az igazság valamely részleges definícióját – amelynek terjedelme a mondatoknak egy tetszőleges rögzített kategóriája – kiterjeszteni minden olyan összetett mondatra, amelyeket az adott kategóriába tartozó olyan kifejezésekkel való összekapcsolás útján építhetünk fel, mint ,ha ... akkor', ,akkor és csak akkor, ha', ,vagy', ,és', ,nem' – ezek röviden szólva az ún. állításkalkulus (a dedukció elmélete) körébe tartozó kifejezések.

Ez ahhoz a gondolathoz vezet, hogy állítsunk fel elég sok, eléggé erős és általános ilyen jellegű törvényt úgy, hogy minden mondat ezen törvények egyike alá essen; ezen a módon jutnánk el az igaz mondat egy általános strukturális definíciójához. Azonban ez az út is majdnem teljesen kilátástalannak tűnik, legalábbis ami a köznyelvet illeti. A köznyelv nem valami „kész", lezárt, világos határokkal körülvett dolog; nincs rögzítve, mely szavakat csatolhatjuk hozzá ehhez a nyelvhez, melyek azok, amelyek bizonyos értelemben „potenciálisan" már hozzá is tartoznak; nem vagyunk abban a helyzetben, hogy strukturálisan meghatározhassuk a nyelv kifejezései közül azokat, amelyeket mondatnak nevezünk; még kevésbé tudjuk az összes mondat közül az igazakat jellemezni. *Az a kísérlet, hogy az ,igaz mondat' terminusra strukturális definíciót építsünk fel, a köznyelvet tekintve olyan nehézségekbe ütközik, amelyeket nem tudunk legyűrni.*

Az eddigi kísérletek kudarca önkéntelenül is arra a sejtésre vezet, hogy az itt tárgyalt probléma egyáltalán nem oldható meg kielégítő módon. Ténylegesen hivatkozhatunk súlyos és általános természetű érvekre, melyek ezt a sejtést kézenfekvővé teszik, és melyeket itt csak röviden fogok tárgyalni.

A köznyelv egyik lényeges jellemzője (ellentétben a különböző tudományos nyelvekkel) az univerzalizmus: ennek a nyelvnek a szellemével összeegyeztethetetlen volna, ha valamely más nyelvben fellépnének olyan szavak vagy kifejezések, amelyek nem fordíthatók le a köznyelvre; „ha valamiről egyáltalán lehet értelmesen beszélni, akkor a köznyelven is lehet róla beszélni". Ha a szemantikai vizsgálatok tekintetében engedelmeskedünk a köznyelv eme univerzalisztikus tendenciájának, következetesen eljárva fel kell vennünk ebbe a nyelvbe a nyelv tetszőleges mondata és egyéb kifejezése mellett az illető mondat vagy kifejezés nevét is, továbbá azokat a mondatokat, amelyek e neveket tartalmazzák, nemkülönben olyan szemantikai kifejezéseket, mint ‚igaz mondat', ‚név', ‚jelöl' stb. is. Másrészt viszont feltehetően éppen a köznyelvnek ez a szemantikai univerzalizmusa a lényegi forrása az összes ún. szemantikai antinómiának, többek közt a hazug vagy a heterologikus szavak antinómiájának; ezek az antinómiák, úgy látszik, egyszerűen azt bizonyítják, hogy bármely olyan nyelvből kiindulva, amely a fenti értelemben univerzális és amelyre emellett érvényesek a logika rendes törvényei, ellentmondásra kell jutnunk. Ez vonatkozik különösen a hazug antinómiájának arra a megfogalmazására, amelyet a 62–64. oldalon adtam meg, és amely nem tartalmaz idézetfüggvényt változó argumentummal. Ha ugyanis az antinómiát a fenti formában tanulmányozzuk, arra a meggyőződésre jutunk, hogy nem létezhet olyan ellentmondásmentes nyelv, amelyre érvényesek a logika szokásos törvényei, és amely emellett kielégíti a következő feltételeket: (I) tetszőleges mondat mellett, amely a nyelvben előfordul, az illető mondatnak egy bizonyos egyedi neve is hozzátartozik a nyelvhez; (II) minden olyan kifejezést, amely úgy keletkezik, hogy (2)-ben a ‚*p*' szimbólumot a nyelv tetszőleges mondatával, az ‚*x*' szimbólumot pedig az illető mondat valamely egyedi nevével helyettesítünk, a nyelv igaz mondatának kell elfogadnunk; (III) a szóban forgó nyelvben megfogalmazható és igaznak elfogadható egy empirikusan megalapozott és (α)-val azonos jelentésű premissza.[9]

Ha a fenti megjegyzések helyesek, *úgy tűnik, az ‚igaz mondat' kifejezés következetes, amellett a logika alapvető törvényeivel és a köznyelv szellemével összhangban álló használatának és – ahogy ebből következik – ezen kifejezés bármiféle szabatos definíciója felépítésének még a lehetősége is igen kérdéses.*

SZERKESZTŐI KOMMENTÁR

E szakasz fejtegetései olvasmányosabb és némileg filozofikusabb formában megtalálhatók a [VIII] tanulmányban. Az (1) alatt megfogalmazott és a (2) alatt általános sémába öltöztetett igazságfeltételt Tarski a 4. jegyzetben Arisztotelésztől származtatja. A filozófiai kommentárirodа-

[9] A heterologikus szavak antinómiája (amit itt nem fogok előadni – vö. GRELLING & NELSON 1908, 307.) egyszerűségben felülmúlja a hazug antinómiáját annyiban, hogy megfogalmazásában nem lép fel (α)-val analóg empirikus premissza; ennek megfelelően erősebb végkövetkeztetéshez is vezet: nem létezhet olyan ellentmondásmentes nyelv, amely megtartja a logika szokásos törvényeit és kielégít két meghatározott feltételt, amelyek analógak (I)-gyel és (II)-vel, de abban különböznek tőlük, hogy nem mondatokról, hanem nevekről, és nem a mondatok igazságáról, hanem a jelölés relációjáról van bennük szó. Lásd ezzel kapcsolatban e tanulmány 5. §-ában az 1. tétel bizonyításának elején használt érvelést, s főleg a 90. jegyzetet.

lom élénken vitatta azt a kérdést, hogy Tarski formulázása valóban helyes értelmezése-e az igazságnak, ill. hogy megfelel-e az arisztotelészi felfogásnak. Az ellenvetésekre Tarski az 1944-ben megjelent [VIII] tanulmány második részében válaszol. További idevágó fejtegetések és kritikai elemzések találhatók a Függelék [XI] és [XII] tanulmányában.

Az 1. § negatív végeredménye – amely szerint a köznyelvre lehetetlen (vagy legalábbis erősen valószínűtlen) olyan igazságdefiníció, amely a logika törvényeivel is és az arisztotelészi igazságfölfogással is összhangban van – különösen provokatív lehet a filozófus olvasó számára. Mint W. Kneale írja, ez a konklúzió annyira megdöbbentő, hogy „gyanússá kell tennie azokat a kiinduló feltevéseket, amelyekből következik". (W. & M. Kneale 1987, 556.) Mármost a „gyanús" kiinduló föltevés, amelyre Tarski fejtegetései épülnek az, hogy az igazság a kijelentő *mondatok* tulajdonsága lehet. Ám Kneale szerint az ‚igaz' predikátum elsődlegesen *állításokra* (kijelentésekre) alkalmazható, nem pedig mondatokra, mint Tarski véli. Az állítások nem nyelvi képződmények, bár természetesen kijelentő mondatok segítségével fejezzük ki őket. Egyazon mondat más-más állítást fejezhet ki, ha különböző személyek (vagy különböző időpontokban) mondják ki (pl. ‚Éhes vagyok'). Ilyen esetekben a mondat nem egyedül, hanem használati körülményeivel (kontextusával) együtt fejez ki állítást. Kneale elismeri, hogy vannak olyan kijelentő mondatok, amelyek információtartalma lényegében független a használati körülményektől (azaz, adott nyelven, minden normális használatuk ugyanazon állítás kifejezésére szolgál). Ilyenek elsősorban a matematikai állításokat kifejező mondatok, de a köznyelvi mondatok körében is bőven találunk ide illő példákat (pl. ‚minden ló gerinces állat'). Amikor ilyen mondatokkal foglalkozunk, nem követünk el komoly hibát, ha igazságuk iránt érdeklődünk. A köznyelv egészét azonban semmiképp sem lehet így kezelni.

Kneale kifogásolja még, hogy Tarski a köznyelv *univerzalizmusát* (az 1. § utolsó előtti bekezdésében) következetlenségnek minősíti. (I. m. 557 sk.) Az 1. §-ban ugyan nem találunk ilyen minősítést, de későbbi cikkeiben (pl. [VIII]-ban) Tarski valóban úgy érvel, hogy a *szemantikailag zárt* nyelvek szükségszerűen inkonzisztensek. A *szemantikai zártság* lényegében ugyanazt jelenti, mint itt (az 1. §-ban) az *univerzalitás*: egy nyelv szemantikailag zárt, ha képes saját kifejezései megnevezésére, és tartalmaz ezekre alkalmazható szemantikai predikátumokat (mint ‚jelöli', ‚jelenti', ‚igaz' stb.), valamint általános logikai terminusokat. Vegyük észre, hogy nemcsak a köznyelv egésze zárt szemantikailag, hanem bizonyos töredékei is, esetleg valamely olyan töredéke is, amelyben a kijelentő mondat fogalma szabatosan definiált. (Tarski is megjegyzi, hogy a köznyelv egészében a mondat fogalmára sem adható szabatos definíció. Ezek után már mérsékelt a meglepődésünk azon, hogy az igaz mondat fogalma sem definiálható a köznyelvre vonatkozóan.) Még az is elképzelhető, hogy valamely formalizált nyelv is lehet szemantikailag zárt.

Az 1. § fő eredménye tehát lényegében az, hogy a szemantikailag zárt nyelvekben rekonstruálható a hazug antinómiájának egy változata, s ennélfogva az ilyen nyelvek logikailag ellentmondásosak. A következő szakaszokban Tarski azt vizsgálja, hogy formalizált nyelvekben (amelyekre a grammatikai kategóriák, köztük a mondat fogalma, szabatosan definiált) milyen feltételekkel definiálható az igaz mondat fogalma. Az iménti eredmény egy elengedhetetlen negatív kritériumot ad: a vizsgált nyelv nem lehet szemantikailag zárt; következésképp az igazság csak „kívülről", az adott nyelvhez viszonyítva külső nyelvben, az ún. metanyelvben lehet definiálható. Ugyancsak negatív kritériumként szolgál az 1. § fő eredménye bizonyos formalizált nyelvek esetében annak kimutatásakor, hogy a formálisan bizonyítható mondatok halmaza szűkebb, mint az igaz mondatok halmaza. (Lásd főleg az 5. §-ban és az Utószóban.)

E megjegyzések jelzik, hogy az 1. § elemzései alapvető jelentőségűek a következő szakaszok vizsgálatai számára, és általánosan a formalizált nyelvek szemantikája, s ennek közvetítésével a deduktív tudományok metodológiája szempontjából. Kevésbé lényegesek Tarskinak a köznyelvre vonatkozó megállapításai. Kneale kritikája pedig éppen ezekre irányul, és kevés szót találunk munkájában Tarski maradandó eredményeinek méltatására. Nem kell vitatnunk Kneale azon megállapítását, hogy az ‚igaz' predikátum elsődlegesen állításokra, nem pedig mondatokra vonatkozik, és azt sem, hogy a köznyelv univerzalitása (szemantikai zártsága) nem bírálható, nem tekinthető fogyatékosságnak vagy következetlenségnek. De ha a természetes nyelvben szemantikai predikátumokat is óhajtunk használni, akkor a szemantikai paradoxonok elhárítására, az antinómiák feloldására elkerülhetetlennek tűnik bizonyos szemantikai rendszabályok bevezetése. Kneale ismerteti azt a megoldást

(i. m. 623. sk.), amely ténylegesen Tarski módszerén alapszik. (Szövegéből nem derül ki egyértelműen, hogy ő maga egyetért-e ezzel a megoldással.) Ennek lényege az, hogy a természetes nyelvekben szinteket kell megkülönböztetnünk. Az első szinten szemantikai predikátumok nem szerepelhetnek; csak a második szinten használhatunk szemantikai predikátumokat az első szint kifejezéseire alkalmazva, a harmadik szinten a második szint kifejezéseire alkalmazva s í. t. Általánosan: az $n+1$-edik szint az n-edik szint metanyelve, amelyben mindarról beszélhetünk, amiről az n-edik szinten, és ezenfelül még az n-edik szint kifejezéseiről is. Magukat a szemantikai predikátumokat is meg kell különböztetni a különböző szinteken.

Az ilyen hierarchia bevezetését indokolja a következő példa, amely nem marasztalható el abban a bűnben, hogy mondatokra alkalmazza az ‚igaz' predikátumot.

Állapodjunk meg abban, hogy az ‚Ez a mondat' terminust a következő mondat megnevezésére használjuk:

(a) Ez a mondat nem fejez ki igaz állítást.

Tekintsük még a következő mondatot is:

(b) ‚Ez a mondat nem fejez ki igaz állítást'
nem fejez ki igaz állítást.

Megállapodásunk alapján *(a)* és *(b)* ugyanarról a mondatról ugyanazt állítják. Így, ha *(b)* igaz állítást fejez ki, akkor *(a)* is, ámde *(b)* azt állítja *(a)*-ról, hogy nem fejez ki igaz állítást. Ennélfogva *(b)* nem fejezhet ki igaz állítást. Ha *(b)* hamis állítást fejez ki, akkor *(b)* negációja igaz, vagyis az, hogy *(a)* igaz állítást fejez ki, ellentmondva annak, hogy *(b)*-vel együtt *(a)*-nak is hamisnak kell lennie. A hazug paradoxonának eme változatától csak úgy szabadulhatunk, ha *(b)*-t nem fogadjuk el állítást kifejező mondatnak (s ekkor nem kell igazságértéket tulajdonítani neki). Ezt a kiutat a nyelvi szintek bevezetésével indokolhatjuk (vagy fordítva, a paradoxonnal motiválhatjuk a nyelvi szintek megkülönböztetésének szükségességét). Valóban, *(b)*-ben az idézett mondatról teszünk szemantikai állítást, így ezen mondatnak eggyel magasabb szinthez kell tartoznia, mint az idézett mondatnak, és szemantikai predikátumainak is eggyel magasabb rendbe kell tartoznia az idézett mondatban előforduló szemantikai predikátumok rendjénél. A szemantikai predikátumok szintszámát indexezéssel jelölve *(b)*-t így kell átfogalmaznunk:

(b') ‚Ez a mondat$_n$ nem fejez$_n$ ki igaz állítást'
nem fejez$_{n+1}$ ki igaz állítást.

A *(b')* alanyaként szereplő idézett mondat megnevezésére most csak egy $n+1$-edik szinthez tartozó kifejezést használhatnánk, pl. ‚ez a mondat$_{n+1}$'; így *(a)* helyett csak a következő mondat jöhet számításba:

(a') Ez a mondat$_{n+1}$ nem fejez$_{n+1}$ ki igaz állítást.

E megállapodás alapján most is igaz az, hogy *(a')* és *(b')* ugyanarról ugyanazt állítják. De az nem igaz, hogy *(b')* az *(a')* mondatról állít valamit, s ennyi elég ahhoz, hogy az ellentmondást elkerüljük. Mi több, bátran mondhatjuk, hogy *(b')* igazat állít: a benne megnevezett mondat, teljesen határozatlan lévén, önmagában semmiféle – sem igaz, sem hamis – állítást nem fejez ki. (A kontextus rögzítésével – jelesen az ‚ez a mondat$_n$' denotátumának meghatározásával – azonban állítás kifejezőjévé válhat.)

Példánk jelzi, hogy Tarski eszméi a természetes nyelvek szemantikai vizsgálataiban is hasznosíthatók, akkor is, ha a köznyelvre vonatkozó egyes megállapításai esetleg pontosításra szorulnak.

2. §. FORMALIZÁLT NYELVEK. AZ OSZTÁLYKALKULUS NYELVE

A köznyelvet illetően a szóban forgó probléma megoldására tett kísérletet tehát, az 1. §-ban kifejtett okoknál fogva, feladom, és a vizsgálódás során a továbbiakban kizárólag a *formalizált nyelvekre*[10] szorítkozom. Ezeket hozzávetőlege-

[10] A formalizált nyelvekre elért eredményeknek a köznyelv tekintetében is van bizonyos érvénye, éspedig az utóbbi univerzalizmusa következtében: ha lefordítjuk a köznyelvre az igaz mondat bármely olyan definícióját, amelyet valamely formalizált nyelvre alkottak, az igazság egy részleges definícióját kapjuk, amely a mondatok szűkebb vagy tágabb kategóriáját fogja át.

sen olyan (mesterségesen konstruált) nyelvekként jellemezhetem, amelyekben minden kifejezés értelmét egyértelműen meghatározza a kifejezés alakja. Anélkül, hogy kísérletet tennék a teljesen kimerítő és pontos leírásukra, melynek során igencsak nagy nehézségekkel kellene megküzdenem, felhívom itt a figyelmet néhány lényeges tulajdonságra, amellyel a jelenleg ismeretes formalizált nyelvek rendelkeznek. Éspedig: (α) minden ilyen nyelv esetében megadjuk vagy (strukturálisan) leírjuk az összes *jelet, amelyből a nyelv kifejezései képezhetők;* (β) az összes kifejezés közül, amely ezekből a jelekből képezhető, tisztán strukturális tulajdonságok segítségével elkülöníthetjük azokat, amelyeket mondatoknak mondunk. Továbbá, legalábbis mindmáig, formalizált nyelveket kizárólag abból a célból konstruálunk, hogy rájuk támaszkodva *formalizált deduktív tudományokat* műveljünk; a nyelv a tudománnyal egyetlen egésszé forr össze, úgyhogy ennek vagy annak a formalizált deduktív tudománynak a nyelvéről beszélünk ahelyett, hogy erről vagy arról a formalizált nyelvről szólnánk. Ezért, összefüggésben a deduktív tudományok felépítésének módjával, a formalizált nyelvek további jellemző tulajdonságai is föllépnek. Éspedig: (γ) megadjuk vagy strukturálisan leírjuk a mondatok egy kategóriáját; ezeket *axiómáknak* vagy *alaptételeknek* nevezzük; (δ) kiemelünk speciális szabályokban, ún. *következtetési szabályokban* bizonyos strukturális jellegű műveleteket, amelyek lehetővé teszik mondatoknak más mondatokká való átalakítását; azokat a mondatokat, amelyeket adott mondatokból ezeknek a műveleteknek egyszeri vagy többszöri alkalmazásával kaphatunk, az adott mondatok *következményeinek* mondjuk; ezen belül az axió-

mák következményeit *bizonyítható* vagy *elfogadott* tételeknek mondjuk.[11]

Talán szükségtelen hozzátenni, hogy bennünket itt a „formális" szó egy bizonyos értelmében vett „formális" nyelvek és tudományok egyáltalán nem érdekelnek; ti. az olyan tudományok, amelyeknek jelei és kifejezései semmiféle tartalmi értelmet nem hordoznak. Ilyen tudományokat tekintve az itt tárgyalt probléma minden jelentőségét elveszíti, sőt úgyszólván nem is érthető. Azoknak a jeleknek, amelyek az itt vizsgált nyelvben fellépnek, mindig teljesen konkrét és számunkra érthető jelentést tulajdonítunk[12]. Azok a kifejezések, amelyeket mondatoknak mondunk, akkor is mondatok maradnak, ha lefordítjuk őket a köznyelvre; az axiómaként kitüntetett mondatokat tartalmilag igazaknak tekintjük; a következtetési szabályok megválasztásában mindig az az elv vezet bennünket, hogy ezen szabályok révén, igaz mondatokra alkalmazva őket, újabb igaz mondatokhoz kell jutnunk.[13]

[11] Egy tudomány formalizálása rendszerint nyitva hagyja olyan új jelek bevezetésének lehetőségét a tudományba, amelyek kezdetben nem voltak explicite megadva. Ezeket a jeleket – melyeket (az *alapjelekkel* szembeállítva) *definiált jeleknek* neveznek – speciális struktúrájú kifejezések, az ún. *definíciók* révén vezetik be a tudományba; definíciókat sajátos szabályok – a *definiálás szabályai* – alapján alkotunk. A definíciókat sokszor a tudomány elfogadott tételeiként tekintik. A nyelvek formalizálásának ezt a mozzanatát a továbbiakban nem vesszük tekintetbe.

[12] Szigorúan véve ez kizárólag az ún. konstansokra vonatkozik. A változóknak és a technikai jeleknek (zárójelek, pontok stb.) nincs önálló jelentésük; ezzel szemben lényegesen befolyásolják azoknak a kifejezéseknek a jelentését, amelyeknek alkotórészei.

[13] Végül a definíciókat úgy alkotják, hogy a nyelvbe bevezetett jelek

A formalizált nyelveknek, a köznyelvvel ellentétben, nincs olyan univerzalisztikus jellegük, amilyenről az előző szakasz végén szó volt. Különösképpen nem tartalmaz ezen nyelvek legnagyobb része semmiféle, a nyelvről szóló elmélet területére tartozó terminust, tehát pl. semmi olyan kifejezést, amely akár az illető nyelv, akár egy másik nyelv jeleit vagy kifejezéseit jelölné vagy ilyenek között fennálló strukturális összefüggést írna le (az ilyeneket, jobb terminus hiányában, *strukturális-leíró kifejezéseknek* fogom nevezni). Ezért amikor egy formalizált deduktív tudomány nyelvét vizsgáljuk, mindig világosan meg kell különböztetnünk azt a nyelvet, amely*ről* beszélünk, attól a nyelvtől, amely*en* beszélünk, és hasonlóképpen azt a tudományt, amely a vizsgálódás tárgya, attól a tudománytól, amelynek keretében a vizsgálódás folyik. Az előbbi nyelv kifejezéseinek és a közöttük fennálló relációknak a nevei már az utóbbi nyelvhez, az ún. *metanyelvhez* tartoznak (mely egyébként töredékként tartalmazhatja az alapnyelvet); ezen kifejezések leírása, a bonyolultabb fogalmak definíciója – különösképpen azoké, amelyek egy deduktív tudomány felépítésével kapcsolatosak – (mint pl. a következtetés, a bizonyítható tétel, esetleg az igaz mondat fogalma), az ilyen fogalmak tulajdonságainak a meghatározása már az utóbbi tudomány feladata, melyet *metatudománynak* fogunk nevezni.

A formalizált nyelvek igen terjedelmes csoportját illetően megadható egy módszer, amely minden egyes ide tartozó nyelv esetében lehetővé teszi az igaz mondat helyes definíciójának megalkotását. Ha általánosan, elvontan írnánk

jelentését alapjelek és korábban definiált jelek segítségével magyarázzák vagy határozzák meg (vö. 11. jegyzet).

le ezt a módszert és azokat a nyelveket, amelyekre alkalmazható, ez meglehetősen nehézkes volna, és nem lenne valami nagyon áttekinthető. Ezért inkább más módon mutatom be ezt a módszert az olvasónak; mégpedig úgy, hogy egy egészen konkrét nyelvre megszerkesztek egy ilyen típusú definíciót, és egyúttal kifejtem legfontosabb következményeit; azok az útmutatások, melyeket ezek után a jelen munka 4. §-ában adni fogok, remélhetőleg eléggé világossá fogják tenni, hogyan lehet az ezen a példán szemléltetett módszert más, logikailag hasonló felépítésű nyelvekre alkalmazni.

Vizsgálódásaink tárgyául egy különösen egyszerű és az olvasó előtt bizonyosan jól ismert deduktív tudomány, nevezetesen az *osztálykalkulus* nyelvét fogom választani. Az osztálykalkulus, mint ismeretes, a matematikai logika része, és felfogható egy – rendszerint *a logika algebrájának* nevezett – „formális" tudomány egyik interpretációjaként.[14]

A vizsgált nyelv kifejezéseiben előforduló jeleken belül két típust különböztetek meg: *konstansokat* és *változókat*.[15] Csak négy konstanst vezetek be: *a negáció jele* ‚*N*', *a logikai összeg (alternáció, diszjunkció) jele* ‚*A*', *az általánosság jele* ‚$\prod$' és végül *az inklúzió jele* ‚*I*'.[16] Ezeket a jeleket rendre

[14] Vö. Schröder 1905, I. köt., különösen 160–163. és Whitehead & Russell 1925, I. köt., 205–212.

[15] Ezzel szemben, hasznosítva Łukasiewicz egy megjegyzését, elkerülöm azt, hogy a nyelvbe bármiféle technikai jeleket (zárójeleket, pontokat stb.) vezessek be, éspedig főképpen annak következtében járhatok így el, hogy a funktorokat minden értelmes kifejezésben mindig argumentumuk elé helyezem; vö. Łukasiewicz 1929, különösen v. és 40.

[16] Az osztálykalkulusban rendszerint sok más konstans is fellép, pl. a létezés, az implikáció, a logikai szorzat (a konjunkció), az ekvivalen-

azonos jelentésűnek tekintem a köznyelv ‚nem', ‚vagy', ‚tetszőleges ...-ra' (abban az értelemben, amelyben ezt a kifejezést pl. az 1. § (6) kijelentésében használtuk), ill. ‚része ...-nak' kifejezéseivel. Változóként elvileg tetszés szerint bármilyen szimbólumokat használhatnánk, feltéve, hogy számukat nem határoljuk le előre, és alakjuk szerint különböznek a konstansoktól. Vizsgálódásaink további lefolyása szempontjából azonban technikailag fontos, hogy pontosan megadjuk ezeknek a jeleknek az alakját, éspedig oly módon, hogy ezek a jelek könnyen sorozatba rendezhetők (megszámlálhatók) legyenek. Változóként tehát itt kizárólag olyan szimbólumokat fogok használni, mint ‚$x_{,}$', ‚$x_{,,}$', ‚$x_{,,,}$' és velük analóg jelek, amelyek az ‚x' szimbólumból és bizonyos számú alul hozzákapcsolt kis vesszőből állnak. Azt a jelet, amely k alul hozzákapcsolt kis vesszőt tartalmaz (ahol k tetszőleges, 0-tól különböző természetes szám), *k-adik változónak* fogjuk nevezni. A nyelv tartalmi interpretációjában, amit itt folytonosan szem előtt

cia jele, továbbá halmazok komplementumának, összegének és szorzatának jelei; (vö. 14. lj.) ezért – formálisan felfogva – a vizsgált nyelvben az osztálykalkulusnak csak egy része alapozható meg. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy ha a nyelv formalizálását teljessé tennénk azáltal, hogy lehetővé tennénk új jelek bevezetését definíciók segítségével (vö. 11. lj.), akkor ebben a nyelvben az osztálykalkulus összes konstansa felléphetne mint definiált jel. Ennek a körülménynek köszönhetően már töredékes nyelvünk elegendő minden gondolat kifejezéséhez, amely a vizsgált tudomány teljes nyelvén megfogalmazható. – Megjegyzem továbbá, hogy a vizsgált nyelvből akár még az inklúzió jele, ‚I' is kiküszöbölhető, ha az „xy" típusú kifejezéseket (ahol ‚x' és ‚y' helyén tetszőleges változó felléphet) úgy értelmezzük, ahogy a továbbiak során az „Ixy" kifejezést értelmezni fogjuk.

tartok, a változók mindig individuumok osztályainak neveit képviselik. A nyelv *kifejezéseiként* részben egyes konstansok és változók, részben ilyen jelek egymásra következéséből álló komplexumok lépnek fel, pl. ‚$x_{,}Nx_{,,}$', ‚$NIx_{,}x_{,,}$', ‚$AIx_{,}x_{,,}Ix_{,,}x_{,}$', ‚$\prod x_{,}$', ‚$\prod x_{,}Ix_{,}x_{,,}$', ‚$Ix_{,,}x_{,,,}$' stb. Az „$Np$", „$Apq$", „$\prod xp$" és „$Ixy$" típusú kifejezéseket, ahol ‚p' és ‚q' helyén tetszőleges mondat vagy mondatfüggvény (ezeknek a terminusoknak a jelentését alább megadjuk), ‚x' és ‚y' helyén pedig tetszőleges változó állhat, rendre így olvassuk: „nem p", avagy „nem igaz, hogy p",[17] „p vagy q", „tetszőleges x osztályra p", ill. „az x osztály része az y osztálynak".[a] Összetett kifejezésekről (azaz olyanokról, amelyek nem jelek) megállapíthatjuk, hogy *két vagy több* más, egyszerűbb *kifejezésből állnak*, így pl. a ‚$NIx_{,}x_{,,}$' kifejezés két egymásra következő kifejezésből, ‚N'-ből és ‚$Ix_{,}x_{,,}$'-ből,

[17] A „nem" szó helyett stilisztikai okokból időnként a „nem igaz, hogy" kifejezést használjuk; ilyenkor ez az egész kifejezés egyetlen szónak tekintendő, és egyes részeinek, különösen a benne előforduló „igaz" szónak, nem tulajdonítandó semmiféle önálló jelentés.

[a] Tarski e cikkben, az osztálykalkulus tárgynyelvében – és a későbbi tárgynyelvekben is – az ún. lengyel jelölést használja, amely szerint minden funktor megelőzi az argumentumát, ill. argumentumait. E jeléléstechnika lehetővé teszi a zárójelek használatának mellőzését, ám a hosszabb kifejezések megértése („dekódolása") némileg fárasztóbb. Az alábbi táblázat megadja Tarski kifejezéseinek átírását az ismertebb, hagyományos formákba.

Lengyel jelölés	Np	Apq	$\prod xp$	Ixy
Hagyományos jelölés	$\sim p$	$p \vee q$	$\forall xp$	$x \subseteq y$

A szerkesztői jegyzetekben és kommentárokban mindig a hagyományos jelölést használjuk, remélhetőleg az olvasó kényelmére.

vagy ‚*NI*'-ből és ‚*x,x,,*'-ből, vagy végül ‚*NIx,*'-ből és ‚*x,,*'-ből áll.

A következő vizsgálódások témaköre persze nem magának az osztálykalkulusnak a nyelve, hanem a neki megfelelő metanyelv lesz; vizsgálataink a *meta-osztálykalkulushoz* tartoznak, mely ezen metanyelv alapján fejthető ki. Ebből ered az a szükséglet, hogy az olvasóval – ha csak felületesen is – megismertessük a metanyelv és a metatudomány struktúráját.

Itt csak a két legfontosabb mozzanatra szorítkozom, éspedig az összes olyan jel és kifejezés felsorolására, amelyet használni fogok a metanyelvben anélkül, hogy a vizsgálódás során közelebbről megmagyaráznám a jelentésüket, és axiómák egy olyan rendszerének felállítására, amely elegendő lesz a metatudomány megalapozásához vagy legalábbis a jelen munkában található eredmények megindoklásához. Ez a két mozzanat benső kapcsolatban áll vizsgálódásaink alapvető problémájával: ha nem vennénk őket tekintetbe, nem állíthatnánk sem azt, hogy sikerült bármiféle fogalmat a metanyelv alapján helyesen definiálnunk, sem azt, hogy a megalkotott definíciónak ilyen vagy olyan következményei vannak. Ezzel szemben arra egyáltalán nem fogok itt kísérletet tenni, hogy a metatudománynak a szigorúan formalizált deduktív tudományok jellemzőit kölcsönözzem. Megelégszem kizárólag azzal a megjegyzéssel, hogy – a két említett mozzanaton kívül – a metatudomány formalizálási eljárásának semmilyen csak rá jellemző sajátossága nincsen; különösképpen a következtetés és a definiálás szabályai nem különböznek semmiben sem azoktól a szabályoktól, amelyeket más formalizált deduktív tudományok felépítésénél alkalmaznak.

A metanyelv kifejezésein belül két kategóriát különböztethetünk meg. Az első kategóriába *általános logikai jellegű kifejezések* tartoznak, melyeket a matematikai logika valamely eléggé kiépített rendszeréből merítünk;[18] ezeket feloszthatnánk még alapkifejezésekre és definiált kifejezésekre, ez azonban a mostani összefüggésben teljesen haszontalan volna. Itt elsősorban újra megtaláljuk azokat a kifejezéseket, amelyek az általunk vizsgált tudomány konstansaival azonos jelentésűek, úgymint ‚*nem*', ill. ‚*nem igaz, hogy*', [17] ‚*vagy*', ‚*bármely*. . . .*-ra*' és ‚*része* . . .*-nak*' – szimbolikusan ‚$\subseteq$'. Ennek a körülménynek tulajdonítható, hogy a nyelv minden kifejezését le tudjuk fordítani a metanyelvbe; így pl. a „*minden a-ra* (ill. *tetszőleges a osztályra*) – $a \subseteq a$" kijelentés a ‚$\prod x,Ix,x,$' kifejezés fordítását képezi. Ugyanehhez a kategóriához tartozik továbbá egy sor analóg kifejezés az állításkalkulus, a függvénykalkulus (a látszólagos változók elmélete) és az osztálykalkulus területéről, pl. ‚*ha* . . ., *akkor*', ‚*és*', ‚*akkor és csak akkor, ha*', ‚*egy bizonyos x-re*' (vagy ‚*van olyan x, hogy* . . .'), ‚*nem része* . . .*-nak*' – szimbolikusan ‚$\nsubseteq$', ‚*azonos* . . .*-val*' – szimbolikusan ‚$=$', ‚*különböző* . . .*-től*' – szimbolikusan ‚$\neq$', ‚*eleme*' – szimbolikusan ‚$\in$', ‚*nem eleme*' – szimbolikusan ‚$\overline{\in}$', ‚*individuum*', ‚*osztály*', ‚*üres osztály*', ‚*az összes olyan x-ek osztálya, hogy*' stb. Találunk itt továbbá néhány kifejezést az osztályok ekvivalenciájának elmélete köréből és a számosságok aritmetikájának területéről, pl. ‚*véges osztály*', ‚*vég-*

[18] Pl. a WHITEHEAD & RUSSELL 1925 munkából (nem szándékom azonban egy bizonyos speciális logikai szimbolika alkalmazása, és – az explicite megadott kivételektől eltekintve – a köznyelv kifejezéseit fogom használni). Az alább megadott általános logikai kifejezések jelentését illetően CARNAP 1929 is tájékoztatást nyújt.

telen osztály', ,*osztály számossága*', ,*számosság*', ,*természetes szám*' (vagy ,*véges számosság*'), ,*végtelen számosság*', ,0', ,1', ,2', ,<', ,>', ,≤', ,≥', ,+', ,−' ... Végül szükségem lesz néhány terminusra a relációk logikájából. Az összes olyan x tárgy osztályát, melyeknek megfelel legalább *egy* olyan y tárgy, hogy xRy (azaz hogy x és y között az R reláció fennáll), közismerten *a kéttagú R reláció értelmezési tartományának* mondjuk, hasonlóképpen azon y tárgyak osztályát, melyekhez van legalább *egy* olyan x tárgy, hogy xRy, *az R reláció képtartományának* nevezzük. Többtagú reláció esetében nem értelmezési és képtartományról, hanem *a reláció 1., 2., 3., ... n-edik tartományáról* beszélünk. Azt a relációt, melynek értelmezési tartományába *egyetlen* x elem, képtartományába pedig *egyetlen* y elem tartozik (mely tehát fennáll az x és y tárgyak között, de más két tárgy között nem áll fenn), olyan *rendezett párnak* nevezzük, *melynek első tagja x, második tagja pedig y.* A többtagú relációkból kiindulva hasonlóképpen határozzuk meg a *rendezett hármasokat*, *négyeseket* és általánosságban a *rendezett n-eseket.* Ha minden y tárgyhoz, amely a kéttagú R reláció képtartományába tartozik, *egyetlen* olyan x tárgy van, hogy xRy, akkor az R relációt *egyértékűnek* (vagy „egy a sokhoz" relációnak) nevezzük. Megfontolásainkban fontos szerepet fog játszani a *sorozat* fogalma. *Végtelen sorozat* minden olyan egyértékű reláció, melynek képtartománya az összes természetes szám osztálya, kivéve a 0-t; hasonlóképpen az „*n-tagú véges sorozat*" terminus illet minden olyan egyértékű relációt, amelynek képtartománya az összes olyan k természetes számból áll, hogy $1 \leq k \leq n$ (ahol n tetszőleges, 0-tól különböző természetes szám). Azt az egyetlen x-et, amely (adott R sorozat és adott k természetes

szám esetén) kielégíti az xRk formulát, *az R sorozat k-adik tagjának* vagy *az R sorozat k indexű tagjának* nevezzük, és az „R_k" szimbólummal jelöljük. Azt mondjuk, hogy *az R és az S sorozat legfeljebb a k-adik helyen különbözik*, ha ezen sorozatok tetszőleges két megfelelő tagja, R_i és S_i azonos, legfeljebb a k-adik tagok, R_k és S_k kivételével, melyek különbözhetnek. A következő megfontolásokban osztályok sorozataival és természetes számok sorozataival lesz dolgunk, azaz olyan sorozatokkal, melyeknek valamennyi tagja osztály vagy pedig természetes szám; ezen belül az olyan sorozatot, melynek minden tagja olyan osztály, amely része egy adott *a* osztálynak, *az a osztály részosztályaiból álló sorozatnak* fogjuk nevezni.

A kifejezések első kategóriájával szemben a második kategóriát *a metanyelv sajátos strukturális-leíró jellegű terminusai* képezik, azaz az osztálykalkulus nyelve konkrét jeleinek és kifejezéseinek jelei, valamint az ilyen kifejezések osztályainak, sorozatainak és a közöttük fennálló strukturális relációknak a nevei. Ide tartoznak elsősorban a következő terminusok: ,*a negáció jele*', ,*a logikai összeg jele*', ,*az általánosság jele*', ,*az inklúzió jele*', ,*a k-adik változó*', ,*az a kifejezés, amely két egymásra következő kifejezésből, x-ből és y-ból áll*' és ,*kifejezés*'; az első hat kifejezés rövidítésére rendre az ,*ng*', ,*sum*', ,*gen*', ,*in*', ,v_k' és ,$x^\frown y$' szimbólumokat fogom használni (a ,*v*' jel tehát egy olyan sorozatot jelöl, melynek tagjai az egymásra következő v_1, v_2, v_3, ... változók). Ezeket a terminusokat már korábban is használtam – amikor bevezetésképpen bepillantást nyújtottam az olvasó számára az osztálykalkulus nyelvébe; remélem, hogy a vonatkozó szakaszban található megjegyzéseknek és példáknak köszönhetően a szóban forgó terminusok értelme tekintetében semmiféle kétség nem maradt. Ezen terminusok (és esetleg az általános logikai terminusok) segítségével definiálható a metatudomány összes egyéb strukturálisleíró jellegű fogalma. Különösképpen, mint könnyen látható, a vizsgálódás tárgyául szolgáló nyelv minden egyszerű vagy összetett kifejezéséhez konstruálható a metanyelvben az illető kifejezésnek egy ugyanolyan típusú individuumneve, mint a köznyelv strukturális-leíró nevei (vö. 61. és 62. o.); így pl. az ‚Nlx_ix_{ii}' kifejezés neveként az ‚$((ng^\frown in)^\frown v_1)^\frown v_2$' szimbolikus kifejezés szolgálhat. Az a körülmény, hogy a vizsgált nyelv minden kifejezésének (és különösen minden mondatnak) megfeleltethető egyfelől az illető kifejezés egy individuumneve, másfelől pedig egy olyan kifejezés, amely az illető kifejezés metanyelvi fordítása, az igazság definíciójának megalkotásában döntő szerepet fog játszani, amiről az olvasó a következő szakaszban meg fog győződni.

Változóként a metanyelvben a következő szimbólumokat fogom használni: (1) ‚a', ‚b', (2) ‚f', ‚g', ‚h', (3) ‚k', ‚l', ‚m', ‚n', ‚p', (4) ‚t', ‚u', ‚w', ‚x', ‚y', ‚z' és (5) ‚X', ‚Y', melyek ebben a sorrendben a következő fajtájú objektumok neveit reprezentálják: (1) tetszőleges jellegű individuumok osztályai,[19] (2) ilyen osztályok sorozatai, (3) természetes számok és természetes számok sorozatai, (4) kifejezések és (5) kifejezések osztályai.

Rátérünk a metanyelv axiómarendszerére. Először is megjegyzem, hogy ebbe a rendszerbe – a kifejezések két kategóriájának megfelelően – mondatok két teljesen különböző fajtája tartozik: egyrészt az *általános logikai axiómák*, amelyek elegendőek a matematikai logika egy eléggé nagy átfogóképességű rendszerének megalapozásához, másrészt *a metanyelv sajátos axiómái*, melyek a fentebb tárgyalt strukturális-leíró fogalmak bizonyos elemi és a szemléletnek megfelelő tulajdonságait írják le. Bizonyára szükségtelen, hogy itt felsoroljuk az első fajtába tartozó, egyébként is jól ismert axiómákat.[20] A második fajtába tartozó axiómákként a következő állításokat vesszük föl:[21]

1. Axióma. *ng, sum, gen és in kifejezések; e négy kifejezés között nincs két azonos.*

2. Axióma. *v_k akkor és csak akkor kifejezés, ha k 0-tól különböző természetes szám; v_k különbözik az ng, sum, gen, in kifejezésektől és $k \neq l$ esetén minden v_l kifejezéstől is.*

3. Axióma. *$x^\frown y$ akkor és csak akkor kifejezés, ha x és y kifejezések; $x^\frown y$ különbözik a ng, sum, gen, in kifejezésektől és a v_k kifejezések mindegyikétől.*

4. Axióma. *Ha x, y, z és t kifejezések, akkor $x^\frown y = z^\frown t$ akkor és csak akkor áll fenn, ha a következő feltételek egyike teljesül: (α) $x = z$ és $y = t$; (β) van olyan u kifejezés, hogy $x = z^\frown u$ és $t = u^\frown y$; (γ) van olyan u kifejezés, hogy $z = x^\frown u$ és $y = u^\frown t$.*

5. Axióma *(a teljes indukció elve). Legyen X olyan osztály, amely kielégíti a következő feltételeket: (α) $ng \in X$, $sum \in X$, $gen \in X$ és $in \in X$; (β) ha k 0-tól különböző termé-*

[19] Annak ellenére, hogy az (1) és a (4) esetben különböző változókat használok, a kifejezéseket itt individuumok speciális osztályaiként, ti. konkrét írásjelsorozatok osztályaiként kezelem (vö. 5. lj.).

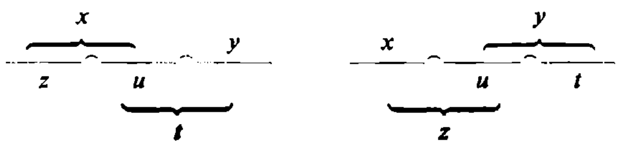
[20] Ezeket ismét a Whitehead & Russell 1925 műből vehetnénk (vö. 18. lj.).

[21] Tudomásom szerint a metaelméletet eddig még nem adták elő axiomatizált rendszerként.

szetes szám, akkor $v_k \in X$; (γ) ha $x \in X$ és $y \in X$, akkor $x^\frown y \in X$ is teljesül. Ez esetben minden kifejezés az X osztályba tartozik.

Az 1–4. axiómák tartalmi jelentése nem szorul közelebbi magyarázatra; az 5. axióma pontos megfogalmazása annak, hogy minden kifejezés véges számú jelből áll.[b)]

[b)] A szemlélet számára világos, hogy a tárgynyelv kifejezései a négy alapjelből és a v_k változókból a konkatenáció (összefűzés) műveletével összeállítható véges füzérek. Az 1–5. axiómák célja annak biztosítása, hogy a metanyelvben a tárgynyelv kifejezéseiről mint *individuális objektumokról* beszélhessünk, beleértve, hogy a szemléletünk számára különböző kifejezések különböző objektumoknak számítsanak. Az 1. axióma kimondja, hogy négy alapjelünk – *ng*, *sum*, *gen* és *in* – négy különböző objektum. A 2. axióma szerint a különböző indexű változók különböző objektumok, és mindegyikük különbözik a négy alapjeltől is. A 3. axióma rögzíti, hogy konkatenáció révén „új" objektum keletkezik, amely különbözik komponenseitől is, a négy alapjel bármelyikétől is, és bármely változótól is. A 4. axióma arról szól, hogy két konkatenáció eredménye mikor számít azonosnak; ennek nemtriviális esetét szemlélteti az alábbi diagram:



Ezen axióma következménye, hogy két kifejezése akkor és csak akkor számít azonosnak, ha „betűről betűre" megegyeznek, azaz ha mindkettőben ugyanazon alapjelek és változók ugyanazon sorrendben fordulnak elő. Végül az 5. axióma azt biztosítja, hogy a kifejezések osztályában nincsenek „idegen" objektumok, hanem csak azok, amelyeknek az 1–4. axiómák szerint ide kell tartozniok.

Ha a metanyelvben kvantifikálunk, a tárgynyelvi kifejezések osztálya feltétlenül része a kvantifikáció tartományának, hiszen az 1–5. axiómák

Be lehetne bizonyítani, hogy *a fenti axiómarendszer kategorikus;*[c)] ez némi biztosítékot nyújt arra, hogy megfelelő alap lesz a metanyelv felépítéséhez.[22]

A megadott axiómák egy része kifejezetten egzisztenciális jellegű, és további ilyen természetű következményeket von

szerepe éppen az, hogy a tárgynyelvi kifejezéseket individuális objektumokként kezelhessük. Világos, hogy a kifejezések osztálya végtelen (pontosabban: megszámlálhatóan végtelen); ezt a metanyelv „erős logikája" bizonyíthatóvá teszi. Ennélfogva *a metanyelv kvantifikációs tartománya is végtelen.* E ténynek fontos szerepe lesz a későbbi fejtegetésekben.

[c)] Itt a ‚kategorikus' jelző azt jelenti, hogy az axiómarendszernek „lényegében" csak egy modellje van, azaz hogy bármely két modellje *izomorf* abban az értelemben, hogy individuumaik között kölcsönösen egyértelmű és a konkatenációt megőrző leképezés létesíthető. Ma elterjedtebb a ‚monomorf' jelző használata a ‚kategorikus' helyett.

[22] A „kategorikus" terminust O. Veblen értelmezésében használom (vö. VEBLEN 1904, 346.) Nem áll szándékomban közelebbről kifejteni, miért látom egy axiómarendszer kategoricitását objektív biztosítéknak arra, hogy a szóban forgó rendszer elegendő a megfelelő deduktív tudomány megalapozásához; ehhez a kérdéshez egész sor megjegyzést tartalmaz FRAENKEL 1928, 347–391.

A „kategorikus" terminus értelmezésében uralkodnak bizonyos – egyébként nem különösebben jelentős – véleménykülönbségek. Anélkül, hogy ebbe közelebbről belemennénk, megjegyzem, hogy a lehetséges értelmezések egyike mellett annak bizonyítása, hogy a rendszer kategorikus, megkívánná, hogy a metatudománynak a szövegben megadott axiómarendszeréhez hozzáfűzzünk két további axiómát. Ezekben az axiómákban – melyeknek egyébként nincs nagyobb jelentőségük – kifejezésre jutna, hogy a kifejezéseket specifikusan osztályokként fogjuk fel (vö. 5. lj.): az egyik axióma kimondaná, hogy bármely két kifejezés diszjunkt osztály (azaz nincs közös elemük), a másikban valamilyen módon rögzítenénk minden egyes kifejezés elemeinek számát.

maga után. Ezen következmények közül figyelmet érdemel az a megállapítás, amely kimondja, hogy az összes kifejezés osztálya végtelen (pontosabban: megszámlálhatóan végtelen). A szemléletes gondolkodás nézőpontjából ez a kijelentés kétségesnek és mindenesetre kevéssé evidensnek tűnik, minek következtében az egész axiómarendszer komoly kritikának vethető alá; pontosabb elemzés esetén egyébként ez a kritika kizárólag a 2. és 3. axiómára, mint a metatudomány infinitizmusa lényegi forrásaira korlátozódna. Ezt a súlyos problémát nem kívánom itt közelebbről tárgyalni.[23] Természetesen az összes említett következményt elkerülhetnénk, ha az axiómákat megfelelő mértékben megtisztítanánk az egzisztenciális előfeltevésektől. Tekintetbe kell azonban vennünk, hogy ha éppen ezeket az axiómákat – melyek biztosítják az összes lehetséges kifejezés létezését – kiküszöbölnénk vagy legyengítenénk, az rendkívül megnehezítené a metatudomány felépítését, lehetetlenné tenné a leggyakrabban használt következtetési lépések egész sorát, és ezáltal súlyos bonyodalmakhoz vezetne a definíciók és állítások megfogalmazásában, ez – mint később meg fogunk győződni róla – már a jelen vizsgálódásokon

[23] Itt pl. a következő, igencsak szubtilis tényezők jönnek szóba. A kifejezéseket normálisan emberi tevékenység termékeiként (ill. ilyen termékek osztályaiként) fogjuk fel; ezen felfogás mellett az a vélekedés, hogy végtelen sok kifejezés létezik, nyilvánvaló képtelenségnek tűnik. Kínálkozik azonban a „kifejezés" terminus egy másfajta értelmezésének lehetősége: kifejezésnek tekinthetnénk ti. minden meghatározott alakú és nagyságú fizikai testet. A probléma súlypontja ezzel a fizika területére tolódik át, a kifejezések számának végtelenségéről szóló megállapítás többé nem képtelenség, sőt egy sajátos következménye azoknak az előfeltevéseknek, amelyeket a fizikában vagy a geometriában normális esetben el szoktak fogadni.

belül kiderül. Ezen okoknál fogva érdemes a vizsgálódást, legalábbis ideiglenesen, az adott axiómarendszerre építeni, annak elsődleges, gyengítetlen alakjában.

A metanyelv előbb felsorolt kifejezéseit és szimbólumait felhasználva a továbbiakban definiálni fogom azokat a fogalmakat, amelyek révén az osztálykalkulus formalizált deduktív tudomány jellegét ölti, éspedig a *mondat*, az *axióma (alaptétel)*, a *következmény* és a *bizonyítható mondat* (vagy *tétel*) fogalmát. Előbb azonban bevezetek néhány segédszimbólumot, melyek a kifejezések különböző egyszerűbb típusainak jelölésére szolgálnak, és a további konstrukciókat nagyon megkönnyítik.

1. DEFINÍCIÓ. *x **inklúzió** v_k előtaggal és v_l utótaggal – szimbolikusan $x = \iota_{k,l}$ – akkor és csak akkor, ha $x = (in^\frown v_k)^\frown v_l$.*

2. DEFINÍCIÓ. *x az y kifejezés **negációja** – szimbolikusan $x = \bar{y}$ – akkor és csak akkor, ha $x = ng^\frown y$.*

3. DEFINÍCIÓ. *x az y és z kifejezések **logikai összege (alternációja, diszjunkciója)** – szimbolikusan $x = y+z$ – akkor és csak akkor, ha $x = (sum^\frown y)^\frown z$.*

4. DEFINÍCIÓ. *x a $t_1, t_2, \ldots t_n$ kifejezések **logikai összege** (vagy kifejezések egy t_n-tagú véges sorozatának logikai összege) – szimbolikusan $x = \sum_k^n t_k$ – akkor és csak akkor, ha t kifejezések egy véges n-tagú sorozata, mely kielégíti a következő feltételek egyikét:* (α) $n = 1$, *és* $x = t_1$, (β) $n > 1$, *és* $x = \sum_k^{n-1} t_k + t_n$.[24]

[24] A 4. definíció, mint látható, induktív (rekurzív) definíció, és mint ilyen, bizonyos módszertani természetű kételyekre adhat alapot. Jól ismert azonban, hogy egy általános módszer segítségével, melynek

5. DEFINÍCIÓ. *x az y és z kifejezések* ***logikai szorzata (konjukciója)*** *– szimbolikusan* $x = y \cdot z$ *– akkor és csak akkor, ha* $x = \overline{\bar{y}+\bar{z}}$.

6. DEFINÍCIÓ. *x az y kifejezés* ***generalizációja (univerzális kvantifikációja)*** *a* v_k *változóra nézve – szimbolikusan:* $x = \bigcap_k y$ *– akkor és csak akkor, ha* $x = (gen^\frown v_k)^\frown y$.

7. DEFINÍCIÓ. *x az y kifejezés* ***generalizációja*** *a* v_{p_1}, v_{p_2}, …, v_{p_n} *változókra nézve – szimbolikusan:* $x = \bigcap_{p_k}^{k \leq n} y$ *– akkor és csak akkor, ha p természetes számoknak egy n-tagú véges sorozata, amely kielégíti a következő feltételek egyikét:* (α) $n = 1$, *és* $x = \bigcap_{p_1} y$, (β) $n > 1$, *és* $x = \bigcap_{p_k}^{k \leq n-1} \bigcap_{p_n} y$.

8. DEFINÍCIÓ. *x az y kifejezés* ***generalizációja*** *akkor és csak akkor, ha vagy* $x = y$, *vagy létezik természetes számoknak olyan n-tagú véges p sorozata, hogy* $x = \bigcap_{p_k}^{k \leq n} y$.

9. DEFINÍCIÓ. *x az y kifejezés* ***egzisztenciális kvantifikációja*** *a* v_k *változóra nézve – szimbolikusan:* $x = \bigcup_k y$ *– akkor és csak akkor, ha* $x = \overline{\bigcap_k \bar{y}}$.

Bevezettünk tehát három alapvető műveletet, amelyekkel egyszerűbb kifejezésekből összetett kifejezések képezhetők: a negációt, a logikai összeadást és az univerzális kvantifikációt. (A logikai összeadás természetesen az a művelet, amellyel két kifejezés logikai összegét képezzük. A ‚negáció' és az ‚univerzális kvantifikáció' kifejezéseket használjuk mind a kifejezéseken végzett megfelelő művelet megnevezésére, mind a művelet eredményeként nyert kifejezés megnevezésére.) Ha az $\iota_{k,l}$ inklúziókat vesszük kiindulópontnak, és tetszőlegesen sokszor végrehajtjuk rajtuk a mondott műveleteket, azoknak a kifejezéseknek a terjedelmes osztályát kapjuk, amelyek a *mondatfüggvény* nevet viselik. A *mondat* fogalma e fogalom aleseteként fog adódni.

eszméje G. Fregétől és R. Dedekindtől származik (vö. DEDEKIND 1923, 33–40., továbbá WHITEHEAD & RUSSELL 1925, I. köt. 550–557. és III. köt. 244.), minden induktív definíció átformálható vele ekvivalens normális definícióvá; ez azonban annyiban nem praktikus, hogy az így nyert formulázások logikai struktúrája bonyolultabb, tartalmilag kevésbé áttekinthetők és kevésbé alkalmasak további levezetésekre. Már csak ezen okokból sem szándékozom kerülni az induktív definíciókat a továbbiakban sem.

10. DEFINÍCIÓ. *x* ***mondatfüggvény*** *akkor és csak akkor, ha x olyan kifejezés, amely kielégíti a következő négy feltétel egyikét:* (α) *van olyan k és l természetes szám, hogy* $x = \iota_{k,l}$; (β) *van olyan y mondatfüggvény, hogy* $x = \bar{y}$; (γ) *van olyan y és z mondatfüggvény, hogy* $x = y+z$; (δ) *van olyan k természetes szám és y mondatfüggvény, hogy* $x = \bigcap_k y$.[25]

[25] A 10. def. pl. a 4. def.-tól kissé eltérő típusú induktív definíció, mert nem szerepel benne a szokásos „átmenet $n-1$-ről n-re". Hogy ezt a definíciót egy szokásos induktív definícióra vezessük vissza, induktíve definiálnunk kellene az „*x n-ed fokú mondatfüggvény*" kifejezést (az $\iota_{k,l}$ inklúziók ez esetben 0-ad fokú függvények lennének, ezek negációi, logikai összegei, valamint tetszőleges változóra való generalizációik első fokú függvények stb.), majd egyszerűen leszögezhetnénk, hogy „*x mondatfüggvény*" ugyanazt jelenti, mint „*van olyan n természetes szám, hogy x n-ed fokú mondatfüggvény*". Átalakíthatnánk a 10. def.-t vele ekvivalens normális definícióvá is, éspedig pl. a következőképpen:

x mondatfüggvény akkor és csak akkor, ha minden X osztály, amely kielégíti a következő négy feltételt, az $x \in X$ *formulának is eleget tesz:* (α) ha k és l 0-tól különböző természetes számok, akkor $\iota_{k,l} \in X$; (β) ha $y \in X$, akkor $\bar{y} \in X$ is áll; (γ) ha $y \in X$ és $z \in X$, akkor $y+z \in X$ is áll; (δ) ha k 0-tól különböző természetes szám és $y \in X$, akkor $\bigcap_k y \in X$.

Hangsúlyozni kell, hogy a 10. def. típusába tartozó rekurzív definíciókat sokkal komolyabb módszertani kétely illetheti, mint a szokásos

A 10. def. szerint mondatfüggvényre példaként szolgálhatnak az

$$‚Ix_{\prime}x_{\prime\prime}‘,\ ‚NIx_{\prime}x_{\prime\prime\prime}‘,\ ‚AIx_{\prime}x_{\prime\prime}Ix_{\prime\prime}x_{\prime}‘,\ ‚\prod x_{\prime}NIx_{\prime}x_{\prime\prime}‘$$

kifejezések és sok más kifejezés. Ezzel szemben az

$$‚I‘,\ ‚Ix_{\prime}‘,\ ‚AIx_{\prime}x_{\prime\prime\prime}‘,\ ‚\prod Ix_{\prime}x_{\prime\prime}‘$$

stb. kifejezések nem tartoznak ebbe a kategóriába.

Könnyen látható, hogy a nyelv minden mondatfüggvényéhez a metanyelvben úgyszólván automatikusan konstruálhatunk egy strukturális-leíró nevet, ezenközben kizárólag az 1., 2., 3. és 5. definícióban bevezetett szimbólumokat használva. Így pl. a következő szimbolikus kifejezések rendre a fent példaként felhozott mondatfüggvények neveként működnek:

$$‚\iota_{1,2}‘,\ ‚\overline{\iota_{1,3}}‘,\ ‚\iota_{1,3}+\iota_{3,1}‘,\quad \text{és}\quad ‚\bigcap_1 \overline{\iota_{1,2}}‘.$$

induktív definíciókat, mert az utóbbiakkal ellentétben az ilyen típusú kijelentések nem mindig alakíthatók át ekvivalens normális definíciókká (vö. 24. lj.). Annak, hogy a vizsgált esetben lehetséges ilyen átalakítás, a definícióban fellépő fogalmak speciális tulajdonságában rejlik a magyarázata (ti. abban, hogy minden kifejezés véges számú jelből áll, és a (β)–(δ) feltételekben megadott műveletek rövidebb kifejezésektől mindig hosszabbakhoz vezetnek). Ha ennek ellenére jelen munkában többször is ilyen definíciókat adok meg a velük ekvivalens normális definíciók helyett (10., 11., 14., 22. és 24. def.), ezt azért teszem, mert ezek a definíciók jelentős, egészen más természetű előnyökkel rendelkeznek: világosabban emelik ki a definiált fogalmak tartalmát, mint a normális definíciók, és ehhez – eltérően a szokásos induktív definícióktól – nem igénylik egyébként haszontalan segédfogalmak előzetes bevezetését (pl. az n-ed fokú mondatfüggvény segédfogalmáét).

11. DEFINÍCIÓ. *v_k az x mondatfüggvény* ***szabad (valódi) változója*** *akkor és csak akkor, ha k 0-tól különböző természetes szám, x pedig olyan mondatfüggvény, amely kielégíti a következő négy feltétel egyikét:* (α) *van olyan l természetes szám, hogy $x = \iota_{k,l}$ vagy $x = \iota_{l,k}$;* (β) *van olyan y mondatfüggvény, hogy v_k az y függvény szabad változója és $x = \bar{y}$;* (γ) *van olyan y és z mondatfüggvény, hogy v_k az y mondatfüggvény szabad változója és $x = y+z$, avagy $x = z+y$;* (δ) *van olyan k-tól különböző l természetes szám és olyan y mondatfüggvény, hogy v_k az y függvény szabad változója és $x = \bigcap_l y$.*

Azokat a változókat, amelyek előfordulnak egy mondatfüggvényben, de annak nem szabad változói, *kötött (látszólagos) változóknak* szokás nevezni.[26]

12. DEFINÍCIÓ. *x* ***mondat*** *(vagy* ***értelmes mondat****) – szimbolikusan $x \in S$ – akkor és csak akkor, ha x mondatfüggvény és egyetlen v_k változó sem szabad változója az x függvénynek.*

Így pl. a

$$\bigcap_1 \iota_{1,1},\quad \bigcap_1 \bigcap_2 \iota_{1,2},\quad \bigcap_1 \left(\iota_{1,1} + \bigcap_1 \bigcup_2 \iota_{2,1}\right)$$

kifejezések mondatok, ezzel szemben az

$$\iota_{1,1},\quad \bigcap_2 \iota_{1,2},\quad \iota_{1,1} + \bigcap_1 \bigcup_2 \iota_{2,1}$$

függvények nem mondatok, mert a v_1 szabad változót tartalmazzák. Az ‚S' szimbólum a fenti definíció szerint az összes értelmes mondat osztályát jelöli.[27]

[26] Vö. HILBERT & ACKERMANN 1928, 52–54.

[27] A 2. § további részében tárgyalt fogalmak magában az igaz mondat definíciójában nem fordulnak elő. Hasznukat fogom venni ezzel szem-

Az osztálykalkulus alaptételeinek rendszere a mondatok két kategóriáját fogja át. Az első kategóriába tartozó mondatokat úgy nyerjük, hogy tetszőleges olyan axiómarendszert tekintünk, amely elegendő az állításkalkulus megalapozásához, és logikai konstansként kizárólag a negáció és a logikai összeadás jele fordul elő benne, tehát pl. a következő négy axiómából álló axiómarendszert:[d)]

$$‚ANAppp’, \quad ‚ANpApq’, \quad ‚ANApqAqp’ \quad \text{és}$$

$$‚ANANpqANArpArq’.$$[28]

Ezekben az axiómákban a ‚p’, ‚q’, ‚r’ mondatváltozókat tetszőleges mondatfüggvényekkel helyettesítjük, és az így kapott kifejezéseken, ha már eleve nem mondatok, tetszőlegesen sokszor végrehajtjuk a generalizáció műveletét, amíg csak valamennyi szabad változó el nem tűnik. Példaként az

$$‚ANA\prod x_{,}Ix_{,}x_{,}\prod x_{,}Ix_{,}x_{,}\prod x_{,}Ix_{,}x_{,}’,$$

$$‚\prod x_{,}\prod x_{,,}ANIx_{,}x_{,,}AIx_{,}x_{,,}Ix_{,,}x_{,}’$$

ben a 3. § elejének előkészítő vizsgálódásaiban, amelyek a definíció végleges formáját megindokolják, nemkülönben a definíció bizonyos következményeinek (a 3. § 3–6. tételeinek) megformulázásánál, melyek az igaz mondatok jellegzetes, tartalmilag fontos tulajdonságait fejezik ki.

[d)] Ez a négy séma az állításkalkulus fölépítéséhez elegendő. Átlátszóbb alakjuk (a kondicionális jelét is fölhasználva) a következő:

$$(p \vee p) \supset p; \quad p \supset (p \vee q); \quad (p \vee q) \supset (q \vee p);$$

$$(p \supset q) \supset ((r \vee p) \supset (r \vee q)).$$

[28] Ez az axiómarendszer azon axiómarendszer egyszerűsítésének és módosításának eredménye, mely a WHITEHEAD & RUSSELL 1925 műben található (I. köt. 96–97.); vö. HILBERT & ACKERMANN 1928, 22.

stb. mondatok szolgálhatnak. Hogy a második kategóriába tartozó mondatokhoz eljussunk, vegyük kiindulópontnak az eddig nem formalizált osztálykalkulus egy olyan axiómarendszerét, amely alapjelként egyedül az inklúzió jelét tartalmazza[29] és fordítsuk le a rendszer axiómáit az itt vizsgált nyelvre; magától értetődően előzetesen ki kell küszöbölnünk az inklúzió jelének segítségével definiált konstansokat, nemkülönben az állítás- és a függvénykalkulus minden olyan terminusát, amely tartalmi értelmezés szerint különbözik az univerzális kvantor, a negáció és a logikai összeadás jelétől.

Példaként említhetem ebbe a kategóriába tartozó mondatra a következőket:

$$‚\prod x_{,}Ix_{,}x_{,}’, \quad ‚\prod x_{,}\prod x_{,,}\prod x_{,,,}ANIx_{,}x_{,,}ANIx_{,,}x_{,,,}Ix_{,}x_{,,,}’$$

13. DEFINÍCIÓ. *x* ***axióma (alaptétel)*** *akkor és csak akkor, ha x kielégíti a következő két feltétel egyikét:* (α) $x \in S$, *és vannak olyan y, z és u mondatfüggvények, hogy x* ***generalizációja a következő négy függvény egyikének:***

$$\overline{y+y}+y, \quad \bar{y}+(y+z), \quad \overline{y+z}+(z+y),$$

$$\overline{\bar{y}+z}+\left(\overline{u+y}+(u+z)\right);$$

(β) *x* ***azonos a következő öt mondat valamelyikével:***[e)]

[29] Itt a HUNTINGTON 1904 cikkben (297.) adott posztulátumrendszerre gondolok. (Ezt a rendszert azonban egyszerűsítettük, amennyiben kiküszöböltünk többek közt bizonyos létezési jellegű előfeltevéseket.)

[e)] A (β) alatti formulák az osztálykalkulus szakmai axiómái. Az első kettő azt mondja ki, hogy a *része* reláció (az inklúzió) reflexív és tranzitív. Hagyományos jelöléssel:

(1) $\forall x(x \subseteq x)$; (2) $\forall x \forall y \forall z[((x \subseteq y) \,\&\, (y \subseteq z)) \supset (x \subseteq z)]$.

A 3. és a 4. axióma azt mondja ki, hogy bármely két osztálynak létezik az egyesítése, ill. a metszete. Két osztály egyesítését úgy értelmezi a szerző, mint a *legszűkebb* olyan osztályt, amelynek mindkét osztály része, két osztály metszetét pedig a *legtágabb* olyan osztályként, amely mindkét osztálynak része. Ezek az értelmezések kifejezhetők a *része* reláció és az univerzális kvantifikáció segítségével; így e két axióma (hagyományos írásban) a következő:

(3)
$$\forall x\, \forall y\, \exists z[(x \subseteq z) \& (y \subseteq z) \;\&\; \forall u(((x \subseteq u) \;\&\; (y \subseteq u)) \supset (z \subseteq u))].$$

(4)
$$\forall x\, \forall y\, \exists z[(z \subseteq x) \& (z \subseteq y) \;\&\; \forall u(((u \subseteq x) \;\&\; (u \subseteq y)) \supset (u \subseteq z))].$$

Az 5. axióma szerint minden osztálynak létezik komplementere, azaz olyan osztály, amellyel a közös része a legszűkebb, egyesítése pedig a legtágabb osztályt adja. Itt a legszűkebb osztály azon osztályként értelmezhető, amely minden osztálynak része (szemléletünk szerint ez az üres osztály), a legtágabb osztály pedig úgy, mint amelynek minden osztály része (az univerzális osztály). Vezessük be a következő rövidítéseket:

„$\forall u\, \forall v[((u \subseteq x) \;\&\; (u \subseteq y)) \supset (u \subseteq v)]$" rövidítése legyen „$x \cap y = \emptyset$".

„$\forall u\, \forall v[((x \subseteq u) \;\&\; (y \subseteq u)) \supset (u \subseteq v)]$" rövidítése legyen „$x \cup y = U$".

„$\sim (z \subseteq y)$" rövidítése legyen „$z \nsubseteq y$".

Ezek fölhasználásával az 5. axióma tömören így fejezhető ki:

(5)
$$\forall x\, \exists y[(x \cap y = \emptyset) \;\&\; (x \cup y = U) \;\&\; \forall z((z \nsubseteq y) \supset$$
$$\supset \exists w[(w \subseteq x) \;\&\; (w \nsubseteq y) \;\&\; (w \subseteq z)])].$$

(Itt a konjunkció harmadik tagja azt mondja ki, hogy ha z nem része y-nak, akkor z-nek van olyan nemüres része, amely teljesen x-be esik.) Ezekből az axiómákból következik az üres osztály ($\emptyset$) és az univerzális osztály (U) létezése, sőt ezek unicitása is, hacsak „$x = y$" definíciójaként elfogadjuk az „$(x \subseteq y) \;\&\; (y \subseteq x)$" formulát. Ugyanígy adódik az egyesítés, a metszet és a komplementer egyértelmű meghatározottsága is.

A 29. jegyzetben említi Tarski, hogy axiómarendszere HUNTINGTON

$$\textstyle\bigcap_1 \iota_{1,1}, \quad \bigcap_1 \bigcap_2 \bigcap_3 (\overline{\iota_{1,2}} + \overline{\iota_{2,3}} + \iota_{1,3}),$$
$$\textstyle\bigcap_1 \bigcap_2 \bigcup_3 \big(\iota_{1,3} \cdot \iota_{2,3} \cdot \bigcap_4 (\overline{\iota_{1,4}} + \overline{\iota_{2,4}} + \iota_{3,4})\big),$$
$$\textstyle\bigcap_1 \bigcap_2 \bigcup_3 \big(\iota_{3,1} \cdot \iota_{3,2} \cdot \bigcap_4 (\overline{\iota_{4,1}} + \overline{\iota_{4,2}} + \iota_{4,3})\big);$$
$$\textstyle\bigcap_1 \bigcup_2 \big(\bigcap_3 \bigcap_4 \big((\overline{\iota_{3,1}} + \overline{\iota_{3,2}} + \iota_{3,4}) \cdot (\overline{\iota_{1,3}} + \overline{\iota_{2,3}} + \iota_{4,3})\big) \cdot$$
$$\textstyle\cdot \bigcap_5 \big(\iota_{5,2} + \bigcup_6 (\iota_{6,1} \cdot \overline{\iota_{6,2}} \cdot \iota_{6,5})\big)\big).$$

A következményfogalom megfogalmazásánál használni fogom többek közt a következő kifejezést: „*u a w kijelentésfüggvényből a v_l változónak a v_k változóval való helyettesítése révén keletkező kifejezés*". Ennek a kifejezésnek a tartalmi értelme világos és egyszerű, a definíció azonban ennek ellenére kissé bonyolult formát ölt:

14. DEFINÍCIÓ. *x az y mondatfüggvényből a v_l (szabad) változónak a v_k (szabad) változóval való* ***helyettesítése*** *révén keletkező kifejezés akkor és csak akkor, ha k és l 0-tól különböző természetes számok, x és y pedig olyan mondatfüggvények, amelyek kielégítik a következő hat feltétel egyikét:*

1904 posztulátumrendszerének egy változata. A lényeges eltérés Tarski és Huntington rendszere között az, hogy Huntington posztulálja mind az üres, mind az univerzális osztály létezését, kimondja, hogy van legalább két (különböző) osztály, továbbá használja az azonosságjelet, kikötve, hogy $a \subseteq b$ és $b \subseteq a$ esetén $a = b$. Huntington rendszere osztályalgebraként is, logikai algebraként (az igazságértékek algebrájaként) is interpretálható (az utóbbihoz szükséges kikötni, hogy legyen legalább két objektum); mint osztályalgebra, tetszőleges *nemüres* osztály részosztályainak algebrája. Tarski axiómái viszont nem zárják ki $\emptyset$ és U azonosságát, és így tetszőleges osztály (akár üres is) részosztályainak rendszerét axiomatizálják.

(α) $x = \iota_{k,k}$ *és* $y = \iota_{l,l}$; (β) *van olyan, l-től különböző m természetes szám, hogy* $x = \iota_{k,m}$ *és* $y = \iota_{l,m}$, *vagy* $x = \iota_{m,k}$ *és* $y = \iota_{m,l}$; (γ) v_l *nem szabad változója az y függvénynek, és* $x = y$; (δ) *vannak olyan z és t mondatfüggvények, hogy* $x = \bar{z}$, $y = \bar{t}$, *és z a t függvényből a* v_l *változónak a* v_k *változóval való helyettesítése révén keletkező kifejezés;* (ε) *vannak olyan z, t, u és w mondatfüggvények, hogy* $x = z+u$, $y = t+w$, *ahol z és u rendre a t, ill. w függvényekből a* v_l *változónak a* v_k *változóval való helyettesítése révén keletkező kifejezés;* (ζ) *vannak olyan z, t mondatfüggvények, és van olyan, k-tól és l-től különböző m természetes szám, hogy* $x = \bigcap_m z$, $y = \bigcap_m t$, *és z a t függvényből a* v_l *változónak a* v_k *változóval való helyettesítése révén keletkező kifejezés.*[30]

Így pl. a fenti definíció szerint az $\iota_{1,1}$, $\bigcap_3(\iota_{3,1}+\iota_{1,3})$ és $\iota_{1,3}+\bigcap_2\iota_{2,3}$ kifejezések rendre az $\iota_{2,2}$, $\bigcap_3(\iota_{3,2}+\iota_{2,3})$, ill. $\iota_{2,3}+\bigcap_2\iota_{2,3}$ függvényekből a v_2 változónak a v_1 változóval való helyettesítésével keletkező kifejezések; ezzel szemben sem a $\bigcap_1\iota_{1,3}$ kifejezést a $\bigcap_2\iota_{2,3}$ függvényből, sem pedig a

[30] A következő normális definíció ekvivalens a fenti rekurzív definícióval (vö. 25. lj.): *x az y kijelentésfüggvényből a* v_l *változóval való helyettesítése révén keletkező kifejezés akkor és csak akkor, ha k és l 0-tól különböző természetes számok, és minden R reláció, amely kielégíti a következő hat feltételt, eleget tesz az xRy formulának is:* (α) $\iota_{k,k}R\iota_{l,l}$; (β) *ha m 0-tól és l-től különböző természetes szám, akkor* $\iota_{k,m}R\iota_{l,m}$, *és* $\iota_{m,k}R\iota_{m,l}$; (γ) *ha z mondatfüggvény, és* v_l *nem szabad változója z-nek, akkor* zRz; (δ) *ha* zRt, *akkor* $\bar{z}R\bar{t}$; (ε) *ha* zRt *és* uRw, *akkor* $z+uRt+w$; (ξ) *ha m 0-tól, k-tól és l-től különböző természetes szám, és* zRt, *akkor* $\bigcap_m zR\bigcap_m t$.

Egészen más gondolaton alapulnak a helyettesítés definíciói a LEŚNIEWSKI 1929, 73. (T. E. XLVII) és LEŚNIEWSKI 1930, 20. (T. E. XLVII[0]) munkában.

$\bigcap_1\iota_{1,1}$ kifejezést a $\bigcap_2\iota_{2,1}$ függvényből ilyen úton nem származtathatjuk.

Mondatok egy adott osztályának következményei közé soroljuk elsősorban az illető osztály összes mondatát, továbbá minden olyan mondatot, amelyet úgy nyerhetünk belőlük, hogy tetszőlegesen sokszor végrehajtunk négy műveletet, éspedig ***a helyettesítést***, ***a leválasztást***, továbbá *az univerzális kvantor bevezetését* és *elhagyását*.[31] Ha ezeket a műveleteket nem kizárólag mondatokon, hanem tetszőleges mondatfüggvényeken akarnánk végrehajtani azzal a céllal, hogy eredményül úgyszintén mondatfüggvényeket kapjunk, akkor a 14. definíció teljességgel meghatározná a helyettesítés műveletének jelentését, a leválasztás művelete az y és $\bar{y}+z$ függvényekhez a z függvényt rendelné, az univerzális kvantor bevezetésének művelete abból állna, hogy az $y+z$ függvényből az $y+\bigcap_k z$ függvényt képezzük (azzal a feltétellel, hogy v_k nem lehet szabad változója az y függvénynek), az univerzális kvantor elhagyása ezzel szemben ellenkező irányú lépés lenne, az $y+\bigcap_k z$ függvénytől az $y+z$ függvényhez.[31] Itt azonban kizárólag (a 12. definíció szerinti) mondatokra kívánunk szorítkozni, és evégett a fenti műveleteket úgy módosítjuk, hogy minden szóban forgó mondatfüggvény helyett egy annak generalizációjaként előálló mondatot tekintünk.

A konstrukció egyszerűsítése végett először is az *n-ed fokú következmény* segédfogalmát definiálom.

15. DEFINÍCIÓ. *x **n-ed fokú következménye** az X mondatosztálynak **akkor és csak akkor**, ha* $x \in S$, $X \subseteq S$, *n termé-*

[31] Vö. ŁUKASIEWICZ 1929, 159–163.; ŁUKASIEWICZ & TARSKI 1930, 46.

szetes szám és vagy (α) $n = 0$ *és* $x \in X$, *vagy pedig* $n > 0$, *és teljesül a következő öt feltétel egyike:* (β) x *az* X *osztály* $n-1$*-ed fokú következménye;* (γ) *vannak olyan* u, w *mondatfüggvények, van olyan* y *mondat és vannak olyan* k, l *természetes számok, hogy* x *az* u *függvény,* y *a* w *függvény generalizációja,* u *a* w *függvényből a* v_l *változónak a* v_k *változóval való helyettesítése révén keletkezik és* y *az* X *osztály* $n-1$*-ed fokú következménye;* (δ) *vannak olyan* u *és* w *mondatfüggvények, valamint olyan* y *és* z *mondatok, hogy* x, y *és* z *rendre az* u, $\bar{w}+u$ *és* w *függvények generalizációi, továbbá* y *és* z *az* X *osztály* $n-1$*-ed fokú következménye;* (ε) *vannak olyan* u *és* w *mondatfüggvények, van olyan* y *mondat és olyan* k *természetes szám, hogy* x *az* $u+\bigcap_k w$, y *pedig az* $u+w$ *függvény generalizációja,* v_k *nem szabad változója az* u *függvénynek, és* y *az* X *osztály* $n-1$*-ed fokú következménye;* (ζ) *vannak olyan* u *és* w *mondatfüggvények, van olyan* y *mondat és olyan* k *természetes szám, hogy* x *az* $u+w$, y *az* $u+\bigcap_k w$ *függvény generalizációja, és* y *az* X *osztály* $n-1$*-ed fokú következménye.*[f]

16. DEFINÍCIÓ. x ***következménye*** *az* X *mondatosztálynak — szimbolikusan* $x \in Cn(X)$ *— akkor és csak akkor, ha van olyan* n *természetes szám, hogy* x n*-ed fokú következménye az* X *osztálynak.*[32]

17. DEFINÍCIÓ. x ***bizonyítható*** *(vagy* ***elfogadott****)* ***tétel*** *— szimbolikusan* $x \in Pr$ *— akkor és csak akkor, ha* x *következménye az összes* ***alaptétel*** *osztályának.*

Mint könnyen látható, a fenti definíció szerint az elfogadott tételek osztályához hozzátartoznak egyfelől mindazok a tételek, amelyeket az állításkalkulus tételeiből ugyanolyan módon kaphatunk, ahogy az első kategóriába tartozó alaptételek (azaz azok, amelyek a 13. definícióban szereplő (α) feltételt elégítik ki) származnak az állításkalkulus axiómáiból, másfelől a nem formalizált osztálykalkulus összes ismert tételei, hacsak előzetesen lefordítjuk őket arra a nyelvre, amely a vizsgálódás tárgyát képezi. Hogy erről meggyőződjünk, minden konkrét esetben utánozzuk a metatudományban a kijelentéskalkulus, ill. az osztálykalkulus megfelelő bizonyítását. Így pl. a fent említett módon nyerhetjük többek között az állításkalkulus jól ismert „*ANpp*' tételéből a $\bigcap_1(\overline{\iota_{1,1}}+\iota_{1,1})$ mondatot. Ennek a tételnek a bizonyítását[33] átírván sorra kifejtjük, hogy a 13. definíció szerint

[f] Ez a definíció, szemléletes átfogalmazásban, az alábbi következtetési szabályokat rögzíti: (1) Az X mondatosztályból következik az x mondat, ha $x \in X$. (2) Ha w' helyettesítéssel nyerhető w-ből (a 14. def. értelmében), és X-ből következik w egy generalizációja, akkor w' generalizációja is következik belőle. (3) Ha X-ből következik „$w \supset u$" generalizációja és w generalizációja, akkor u generalizációja is következik X-ből. (4) Ha X-ből következik „$u \vee w$" generalizáltja, akkor „$u \vee \forall z \cdot w$" generalizáltja is következik belőle, és fordítva is, föltéve mindkét esetben, hogy a z változó nem fordul elő szabadon u-ban.

[2] A következmény fogalmát közvetlenül (azaz az n-ed fokú következmény segítsége nélkül) is bevezethetnénk, pl. a következő módon:

$x \in Cn(X)$ *akkor és csak akkor, ha* $X \subseteq S$, *és minden* Y *osztály, amely kielégíti a következő öt feltételt, eleget tesz az* $x \in Y$ *formulának is:* (α) $X \subseteq Y$; (β) *ha* $y \in S$, y *generalizációja az* u *függvénynek,* z *pedig a* w *függvénynek,* u *a* w *függvényből a* v_l *változónak a* v_k *változóval való helyettesítése révén keletkezik, továbbá* $z \in Y$, *akkor* $y \in Y$; (γ) *ha* $y \in S$, y, z *és* t *rendre az* u, $\bar{w}+u$ *és* w *függvények generalizációi, továbbá* $z \in Y$ *és* $t \in Y$, *akkor* $y \in Y$; (δ) *ha* $y \in S$, u *és* w *mondatfüggvények,* y *az* $u+\bigcap_k w$ *függvény generalizációja,* z *az* $u+v$ *függvény*

$$\bigcap_1 (\overline{\overline{\iota_{1,1} + \iota_{1,1}} + \iota_{1,1}}), \quad \bigcap_1 (\overline{\iota_{1,1}} + (\iota_{1,1} + \iota_{1,1})) \quad \text{és}$$

$$\bigcap_1 \left(\overline{\overline{\overline{\iota_{1,1} + \iota_{1,1}} + \iota_{1,1}} + \overline{\left(\overline{\iota_{1,1}} + (\iota_{1,1} + \iota_{1,1}) + (\overline{\iota_{1,1}} + \iota_{1,1})\right)}}\right)$$

alaptételek; ennek következtében a 15. definíció szerint

$$\bigcap_1 (\overline{\overline{\iota_{1,1}} + (\iota_{1,1} + \iota_{1,1})} + (\overline{\iota_{1,1}} + \iota_{1,1}))$$

elsőfokú,

$$\bigcap_1 (\overline{\iota_{1,1}} + \iota_{1,1})$$

pedig másodfokú következménye az összes alaptétel osztályának. $\bigcap_1 (\overline{\iota_{1,1}} + \iota_{1,1})$ tehát, tekintettel a 16. és 17. definícióra, bizonyítható mondat.

Ilyen következtetések példája nyomán elképzelhetőek azok a nehézségek, amelyekkel azonnal szembekerülnénk, ha a metatudomány axiómáiból ki akarnánk küszöbölni a bennük megbúvó egzisztenciális előfeltevéseket. Az a körülmény, hogy az axiómák többé nem biztosítanák azoknak az egyes kijelentéseknek a létezését, amelyekről ki szeretnénk mutatni, hogy bizonyíthatóak, kisebb súllyal esne latba. Nagyobb jelentőségű mindenekelőtt az a körülmény, hogy még úgy sem tudnánk megalapozni ennek vagy

generalizációja, v_k nem szabad változója az u függvénynek, és $z \in Y$, akkor $u \in Y$ is áll; (ε) ha $y \in S$, u és w mondatfüggvények, y az $u + w$ függvény generalizációja, z az $u + \bigcap_k w$ függvény generalizációja, továbbá $z \in Y$, akkor $y \in Y$ is áll.

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy a most adott definíciót egy a 10. def. típusába tartozó kifejezéssé átalakítva olyan kijelentést kapunk, amely sem a fenti definícióval, sem bármely más normális definícióval nem ekvivalens.

[33] Vö. WHITEHEAD & RUSSELL 1925, I. köt. 101., *2.1.

annak a konkrét mondatnak a bizonyíthatóságát, ha feltételként kimondanánk a létezését, mivel a bizonyításban hivatkoznunk kellene más, rendszerint bonyolultabb mondatok létezésére (mint ahogy az már a ‚$\bigcap_1 (\overline{\iota_{1,1}} + \iota_{1,1}) \in Pr$' tétel fentebb vázolt bizonyításából is látható). Amíg egyedi „$x \in Pr$" alakú tételek bizonyításával van dolgunk, segíthetünk magunkon úgy, hogy az ilyen tételeket olyan premisszákkal látjuk el, amelyek biztosítják a bizonyításhoz szükséges mondatok létezését. A nehézségek jelentősen megnőnének, amikor olyan általános jellegű tételekre térnénk át, amelyek azt mondják ki, hogy minden mondat, amely egy bizonyos fajtába tartozik, bizonyítható, vagy – még általánosabban – következménye mondatok egy adott osztályának; ilyen esetben premisszaként gyakran olyan általános egzisztenciafeltevéseket kellene felvennünk, amelyek nem volnának gyengébbek, mint azok, amelyeket az axiómákból az evidencia kedvéért kiküszöböltünk.[34]

A fent mondottak alapján elfoglalhatnánk azt az álláspontot is, hogy az egzisztenciális előfeltevések elvetése esetén a 17. definíció nem ragad meg minden tulajdonságot, amit az elfogadott tétel fogalmának tulajdonítunk. Ez esetben felvetődik a fenti definíció megfelelő „helyesbítésének" problémája; pontosabban kifejezve, az elfogadott tétel egy olyan definíciójának konstruálásáról lenne szó, amely az egzisztenciális előfeltevések területén egyenértékű lenne a 17. definícióval, és – ezektől az előfeltevésektől immár függetlenül – következne belőle minden „*ha az x mondat létezik, akkor* $x \in Pr$" alakú tétel, hacsak a megfelelő „$x \in Pr$" tétel a vizsgált előfeltevések segítségével bizonyít-

[34] Ez könnyen látható a 3. § 11., 12., 24. és 28. tételének példáján.

ható. Röviden vázolom egy megoldását ennek a problémának.

Könnyen bizonyítható, hogy a metatudományban elfogadott axiómarendszer interpretálható a természetes számok aritmetikájában: a kifejezések és a természetes számok között létesíthető olyan egy-egy értelmű megfeleltetés, amely mellett a kifejezéseken végzett műveletekhez ugyanolyan formális tulajdonságokkal rendelkező számműveleteket rendelhetünk. Ha ezt a hozzárendelést tekintjük, a számok összességén belül elkülöníthetjük azokat, amelyeket kijelentésekhez rendeltünk hozzá, ezek közül kiemelhetjük az „alap"-számokat, bevezethetjük számok egy adott osztálya „következményének" fogalmát, és végül definiálhatjuk az „elfogadott" számokat mint az összes „alap"-szám osztályának „következményeit". Ha mármost kiküszöböljük az axiómákból az egzisztenciális előfeltevéseket, akkor eltűnik az egy-egy értelmű megfeleltetés: minden kifejezésnek továbbra is egy természetes szám felel meg, de nem felel meg minden számnak egy kifejezés; ennek ellenére fenntartható az „elfogadott" szám előzőleg meghatározott fogalma, és az elfogadott tételeket mint olyanokat definiálhatjuk, amelyek az „elfogadott" számokhoz vannak hozzárendelve. Ha ezen új definíció alapján kíséreljük meg bebizonyítani egy konkrét kijelentésről, hogy elfogadott, nem leszünk kénytelenek – mint könnyen belátható – semmiféle más kijelentés létezésére hivatkozni. Azonban – mint nyomatékosan hangsúlyoznunk kell – a bizonyításhoz továbbra is nem kevésbé szükségünk lesz egy (bár gyengébb) egzisztenciális előfeltevésre, ti. arra, hogy eléggé sok különböző individuum létezik. Ha tehát az új definíció esetén is minden kívánt következtetést le akarunk vezetni, akkor a

metatudományban el kell fogadnunk az ún. *végtelenségi axiómát*, azaz azt az előfeltevést, hogy az összes individuum osztálya végtelen.[35] Nem ismerek semmi más utat, még kevésbé természetest és bonyolultabbat sem, amely az említett axiómától függetlenül elvezetne az adott probléma megnyugtató megoldásához.

A következmény és az elfogadott tétel fogalmával összefüggésben említettem ún. következtetési szabályokat. Ha ti. egy deduktív tudománynak magának a felépítését tűzzük ki célul, nem pedig egy ilyen tudománynak a metatudomány szintjén végbeviendő vizsgálatát, akkor a 17. definíció helyett egy szabályt adunk meg, amely megengedi, hogy az illető tudomány axiómáinak minden következményét hozzákapcsoljuk a tudományhoz. Esetünkben ezt a szabályt négy szabállyá tagolhatnánk szét – megfelelően annak a négy műveletnek, amelyet a következmények megalkotásánál használunk.

A mondat és a következmény fogalmának segítségével már bevezethetők a metatudományba a legfontosabb metodológiai fogalmak, így elsősorban *a deduktív rendszer*, *az ellentmondás-mentesség* és *a teljesség* fogalma.[36]

18. DEFINÍCIÓ. *X* ***deduktív rendszer*** *akkor és csak akkor, ha* $Cn(X) \subseteq X \subseteq S$.

19. DEFINÍCIÓ. *X* ***ellentmondásmentes*** *mondatosztály akkor és csak akkor, ha* $X \subseteq S$, *és tetszőleges x mondat esetén vagy* $x \,\overline{\in}\, Cn(X)$, *vagy* $\bar{x} \,\overline{\in}\, Cn(X)$.

20. DEFINÍCIÓ. *X* ***teljes*** *mondatosztály akkor és csak akkor,*

[35] Vö. WHITEHEAD & RUSSELL 1925, II. köt. 203.
[36] Vö. TARSKI 1956b, 70., 90., 93.

ha $X \subseteq S$, és tetszőleges x mondat esetén vagy $x \in Cn(X)$, vagy $\bar{x} \in Cn(X)$.

A további vizsgálódások során még egy fogalom hasznosnak fog bizonyulni.

21. DEFINÍCIÓ. *Az x és y kijelentések* ***ekvivalensek*** *az X mondatosztályra vonatkoztatva, ha $x \in S$, $y \in S$, $X \subseteq S$, és mind $\bar{x}+y \in Cn(X)$, mind $\bar{y}+x \in Cn(X)$.*

Az e szakaszban bevezetett fogalmak részletesebb elemzése meghaladná a jelen munka kereteit.

3. §. AZ IGAZ MONDAT FOGALMA AZ OSZTÁLYKALKULUS NYELVÉBEN

Rátérek a jelen munka fő problémájára – éspedig az *igaz mondat* definíciójának megszerkesztésére, amelyhez továbbra is az osztálykalkulus nyelve marad a vizsgálódás tárgya.

Első pillantásra úgy tűnhetne, hogy vizsgálódásaink mostani stádiumában ez a feladat nehézség nélkül megoldható, hogy ‚igaz mondat' egy formalizált deduktív tudomány nyelvére vonatkoztatva semmi mást nem jelent, mint ‚bizonyítható tétel', és hogy ennek következtében a 17. def. egyúttal az igaz mondatnak is definíciója, éspedig tisztán strukturális jellegű definíció. Közelebbi megfontolás után azonban a fenti nézetet már csak a következő okból is el kell utasítanunk: ha az igaz mondat egy definíciója összhangban van a nyelvhasználattal, akkor nem vonhat maga után a kizárt harmadik elvének ellentmondó következményeket. Ez az elv azonban nem érvényes a bizonyítható tételek tartományában. Egyszerű példát találhatunk két, egymásnak ellentmondó mondatra (azaz olyanra, hogy az

egyik a másik negációja), melyek közül egyik sem bizonyítható, pl. a később következő E lemmában. A két fogalom terjedelme tehát nem azonos; kétségtelen, hogy az összes bizonyítható tétel – tartalmi szempontból – igaz mondat (legalábbis a 2. §-ban a 13–17. definíciókat ezzel a célkitűzéssel fogalmaztuk meg); de az igaz mondat keresett definíciójának ki kell terjednie olyan mondatokra is, amelyek nem bizonyíthatók.[37]

Próbáljuk meg problémánkat egészen más oldalról meg-

[37] Figyelembe kell vennünk azt a körülményt is, hogy – az igaz mondat fogalmával ellentétben – a bizonyítható tétel fogalmának, ahogy számos deduktív tudományban alkalmazzák, meglehetősen esetleges jellege van, ami főképpen a tudomány történeti fejlődésével függ össze. Gyakran nehéz megadni azokat a gyakorlati indokokat, amelyek alapján ennek a fogalomnak a terjedelmét ilyen vagy olyan irányban szűkítjük vagy bővítjük. Így pl. – ha az osztálykalkulusról van szó – a 2. § definíciói alapján a $\overline{\bigcap_1 \bigcap_2 \iota_{1,2}}$ mondat, amely legalább két különböző osztály létezését mondja ki, nem lesz elfogadott, mint ezt az E lemma mutatja. Ez a mondat nem vezethető le azokból a formális előfeltevésekből sem, melyekre a SCHRÖDER 1890–1905 mű épül, habár ez esetben a dolog nem egészen világos (vö. I. 245. és 246., II./1. 278., III./1. 17. és 18.); sok más munkában viszont a szóban forgó mondat a logika algebrájának egyik axiómájaként szerepel, vagy pedig ezen axiómák kézenfekvő következményeként adódik (vö. pl. HUNTINGTON 1904, 297., 10. posztulátum). Egészen más okokból, melyekről alább a 24. tétellel kapcsolatban lesz szó (lásd főleg 54. lj.), célszerű volna a

$$\bigcap_1 (\bigcap_2 \iota_{1,2} + \bigcup_2 (\iota_{2,1} \cdot \bigcap_3 (\bigcap_4 \iota_{3,4} + \overline{\iota_{3,2}} + \iota_{2,3})))$$

mondatot felvenni az elfogadott tételek közé, ami azonban rendszerint nem történik meg. [Ez a mondat azt fejezi ki, hogy minden nemüres osztálynak van egyelemű része. – *A szerk.*] – Ezen két fogalom: az elfogadott tétel és az igaz mondat egymáshoz való viszonyának problémájára a vizsgálódás folyamán még többször vissza fogok térni.

közelíteni, visszatérve a szemantikai definíció 1. §-beli eszméjéhez. Mint ahogy már a 2. §-ból tudjuk, a metanyelvben minden mondatnak, amely az osztálykalkulus nyelvéhez tartozik, megfelel egyfelől a mondat egy strukturális-deskriptív típusú individuumneve, másfelől egy olyan mondat, amelynek jelentése azonos az adott mondatéval. Így pl. a

$$‚\prod x, \prod x,, AIx,x,,Ix,,x,‘$$

mondatnak megfelel a

$$‚\bigcap_1 \bigcap_2 (\iota_{1,2} + \iota_{2,1})‘$$

név és a

‚bármely a és b osztályra, a ⊆ b vagy b ⊆ a‘

mondat. Abból a célból, hogy a vizsgált nyelv valamely konkrét mondata tekintetében megmagyarázzuk az igazság fogalmának tartalmát, ugyanazt a módszert alkalmazhatjuk, amelyet az 1. §-ban a (3) és a (4) mondat megfogalmazásakor alkalmaztunk: vesszük a (2) sémát (lásd 60.), és benne az ‚*x*‘ szimbólumot az adott mondat nevével, ‚*p*‘-t pedig a metanyelvi fordításával helyettesítjük. Az ilyen úton kapott mondatok, mint pl.

$\bigcap_1 \bigcap_2 (\iota_{1,2}+\iota_{2,1})$ *igaz mondat akkor és csak akkor, ha tetszőleges a és b osztályra, a ⊆ b vagy b ⊆ a*

– magától értetődően a metanyelvhez tartoznak, pontosan és a nyelvhasználattal egyező módon magyarázzák a bennük előforduló ‚*x igaz mondat*‘ alakú beszédfordulatok jelentését. Az igaz mondat egy általános definíciójától tehát – alapjában véve – nem kívánhatunk sokkal többet, mint

hogy kielégítse a módszertani szabatosság követelményeit, és speciális esetként átfogjon minden ilyen típusú részleges definíciót, azaz úgyszólván ezek logikai szorzata legyen. Legföljebb azt lehet még megkívánni, hogy a definiált fogalom terjedelmébe kizárólag mondatok tartozzanak, tehát hogy a megszerkesztett definíció alapján minden olyan „*x nem igaz mondat*” típusú mondat bizonyítható legyen, melyben az ‚*x*‘ helyén tetszőleges olyan kifejezés vagy más tárgy neve fordul elő, amely nem mondat.

Ha az összes igaz mondat osztályának jelölésére bevezetjük a ‚*Ver*‘ szimbólumot, akkor a fenti posztulátumok az alábbi konvencióban fejezhetők ki:

V KONVENCIÓ. *A ‚Ver‘ szimbólum egy formailag szabatos, a metanyelv terminusaiban megfogalmazott definícióját az igazság tartalmilag helytálló definíciójának mondjuk, ha következményként maga után vonja:*

(α) az összes olyan mondatot, amelyet az „$x \in Ver$ akkor és csak akkor, ha p” kifejezésből úgy nyerünk, hogy az ‚x‘ szimbólum helyére a vizsgált nyelv tetszőleges mondatának egy strukturális-leíró nevét helyettesítjük, a ‚p‘ szimbólum helyére pedig azt a kifejezést, amely ennek a mondatnak a metanyelvi fordítása;

(β) a „minden x-re, ha $x \in Ver$, akkor $x \in S$” (vagy más szavakkal: „$Ver \subseteq S$”) mondatot.[38]

[38] **Ha a metanyelvet és az azon művelt metatudományt alá akarnánk vetni a formalizálás eljárásának, a V konvencióban fellépő különféle kifejezések – mint pl.** *‚az adott szimbólum formailag szabatos definíciója‘, ‚a vizsgált nyelv egy adott kifejezésének strukturális-leíró neve‘, ‚egy adott kifejezés fordítása (a vizsgált nyelvből) a metanyelvbe‘* – je-

Meg kell jegyeznünk, hogy a fenti konvenció második részének nincs lényegi jelentősége; ha a metanyelv már rendelkezik az (α) feltételt kielégítő ‚*Ver*' szimbólummal, könnyen definiálhatunk olyan ‚*Ver''* szimbólumot, amely ezenkívül a (β) feltételt is teljesíti; ehhez elég föltennünk, hogy *Ver'* a *Ver* és az *S* osztályok közös része.

Ha a vizsgált nyelv csak véges sok, előre meghatározott számú mondatot tartalmazna, és mindezeket a mondatokat fel tudnánk sorolni, akkor az igazság helyes definíciója megalkotásának problémája nem okozna nehézséget – elegendő volna erre a célra, ha kitöltenénk a következő sémát:

$$x \in \textit{Ver akkor és csak akkor, ha vagy } x = x_1 \textit{ és } p_1\textit{, vagy}$$
$$x = x_2 \textit{ és } p_2\textit{, vagy} \ldots \textit{vagy } x = x_n \textit{ és } p_n\textit{,}$$

ahol az ‚x_1', ‚x_2', ..., ‚x_n' szimbólumokat sorban a vizsgált nyelv valamennyi mondatának strukturális-leíró nevével, a ‚p_1', ‚p_2', ..., ‚p_n' jeleket pedig ezen mondatok metanyelvi fordításával helyettesítjük. Ténylegesen azonban nem ez a helyzet. Ha a nyelvben végtelen sok mondat van, a mondott séma szerint automatikusan felépített definíciónak végtelen sok szóból kellene állania, ilyen mondatot pedig sem a metanyelvben, sem semmiféle más nyelvben nem tudunk megfogalmazni. Ettől feladatunk jóval bonyolultabbá válik.

Fölvetődik az a gondolat, hogy a rekurzív módszert alkalmazzuk. A nyelv mondatai között ugyanis a logikai struktúra tekintetében egészen különböző fajta kifejezéseket ta-

lentésének pontos meghatározása nem járna különösebb nehézséggel. A konvenció maga ebben az esetben, a kifejezésmód jelentéktelen módosítása árán, normális definícióvá válna a *meta-metatudományban*.

lálunk – teljesen elemieket és többé vagy kevésbé összetetteket. Arról volna tehát szó, hogy megadjuk az összes műveletet, amelynek segítségével egyszerűbb mondatokat összetettebbekké kapcsolunk össze, és rögzítsük, hogyan függ az összetettebb mondatok igazsága, ill. hamissága a bennük foglalt egyszerűbb mondatok igazságától, ill. hamisságától. Ezenkívül ki kellene választanunk bizonyos elemi mondatokat, amelyekből az említett műveletek segítségével a nyelv összes mondata megszerkeszthető; ezeket a kiválasztott mondatokat explicit módon fel kellene osztanunk igazakra és hamisakra, pl. a fent leírt részdefiníciók segítségével. A fenti elképzelés megvalósítása során egy nagyon lényeges akadályba ütközünk: a 2. § 10–12. definícióinak már az egész felszínes elemzése is megmutatja, hogy általános esetben az összetettebb mondatok egyáltalán nem egyszerűbb mondatok összekapcsolásai. A mondatfüggvények valóban így keletkeznek ugyan elemi függvényekből, ti. inklúziókból, de a mondatokat a mondatfüggvények meghatározott speciális eseteként kapjuk. Tekintettel erre a tényre, nem lehet olyan módszert megadni, amely lehetővé tenné, hogy a keresett fogalmat közvetlenül rekurzíve definiáljuk. Az a lehetőség azonban adott, hogy bevezessünk egy általánosabb jellegű fogalmat, amely tetszőleges mondatfüggvényre alkalmazható, definiálható rekurzíve, és ha mondatokra alkalmazzuk, közvetve elvezet az igazság fogalmához. E követelménynek eleget tesz az *adott mondatfüggvény kielégítése adott tárgyakkal* – jelen esetben individuumok adott osztályaival – fogalma.

Kíséreljük meg először azt, hogy a nevezett fogalomnak a szokásos, a nyelvben jelen levő értelmét tegyük világossá néhány példa segítségével. Az a mód, ahogy ezt megtesszük, természetes általánosítása annak, amelyet korábban az igazság fogalmánál alkalmaztunk.

Legegyszerűbb és legkézenfekvőbb az az eset, amelyben az adott mondatfüggvény csak *egy* szabad változót tartalmaz. Ekkor minden egyes tárgyról értelmesen megállapítható, hogy az adott függvényt kielégíti, ill. nem elégíti ki.[39] Ennek a fordulatnak a magyarázata céljából vizsgáljuk meg a következő sémát:

*minden **a**-ra — **a** kielégíti az x mondatfüggvényt akkor és csak akkor, ha p,*

és helyettesítsük ebben a sémában ‚*p*'-t az adott mondatfüggvénnyel (miután előzőleg a benne előforduló szabad változót ‚*a*'-val helyettesítettük), *x*-et pedig ennek a függvénynek egy egyedi nevével. Ezen az úton — még a köznyelv talaján — pl. a következő megfogalmazást kaphatjuk:

*minden **a**-ra — **a** kielégíti az ‚x fehér' mondatfüggvényt akkor és csak akkor, ha **a** fehér*

(és ebből következtethetünk többek közt arra, hogy a hó kielégíti az ‚*x* fehér' mondatfüggvényt). Az olvasó előtt bizonyára ismert hasonló konstrukció pl. az iskolai algebrából, ahol speciális típusú mondatfüggvényeket vizsgálunk, az ún. egyenleteket; és azokat a számokat, amelyek kielégítik ezeket a függvényeket, az egyenlet gyökeinek mondjuk (pl. az ‚$x+2 = 3$' egyenlet egyetlen gyöke 1).

Ha a vizsgált függvény éppen az osztálykalkulus nyelvé-

[39] Egyelőre elvonatkoztatok azoktól a kérdésektől, amelyek a változók ún. szemantikai kategóriájához (vagy logikai típusához) kapcsolódnak; ezeket a problémákat a 4. §-ban fogom tárgyalni.

hez tartozik, és az „*a* kielégíti az adott mondatfüggvényt" kifejezés ide tartozó meghatározását teljességgel a metanyelv terminusaiban kell megfogalmaznunk, akkor a fent megadott sémában ‚*p*' helyére nem magát a mondatfüggvényt helyettesítjük, hanem a metanyelv vele azonos jelentésű kifejezését, ‚*x*'-et pedig ennek a függvénynek egy egyedi nevével helyettesítjük, mely szintén a metanyelvhez tartozik. Ez a módszer tehát pl. ‚$\prod x_{,,} Ix_{,} x_{,,}$' függvényre alkalmazva a következő megfogalmazást eredményezi:

*minden **a**-ra — **a** kielégíti a $\bigcap_2 \iota_{1,2}$ mondatfüggvényt akkor és csak akkor, ha tetszőleges **b** osztályra, **a** $\subseteq$ **b***

(ebből rögtön következik, hogy az üres osztály az egyetlen osztály, amely kielégíti a ‚$\prod x_{,,} Ix_{,} x_{,,}$' függvényt).

Egészen hasonlóan járunk el abban az esetben is, amikor a vizsgált mondatfüggvény két szabad változót tartalmaz; a különbség csak az, hogy a kielégítés fogalmát itt nem egyes tárgyakra, hanem tárgyakból álló párokra (pontosabban: rendezett párokra) vonatkoztatjuk. Ezen a módon pl. a következő megfogalmazást kapjuk:

tetszőleges a-ra és b-re — a és b kielégíti az „x látja y-t" mondatfüggvényt akkor és csak akkor, ha a látja b-t; tetszőleges a-ra és b-re — a és b kielégíti az $\iota_{2,3}$ (azaz ‚$Ix_{,,} x_{,,,}$') mondatfüggvényt akkor és csak akkor, ha a $\subseteq$ b.

Végül áttérünk az általános esetre, amikor az adott mondatfüggvény tetszőleges számú szabad változót tartalmaz. Hogy egységes kifejezésmódot kapjunk, mostantól kezdve nem azt mondjuk, hogy adott tárgyak, hanem azt, hogy *tárgyak egy adott végtelen sorozata elégít ki egy adott mondatfüggvényt*. Ha eközben az osztálykalkulusból vett függvények vizsgálatára szorítkozunk, akkor az a körülmény, hogy e tudomány nyelvének összes változói sorozatba rendezettek (megszámozottak), megkönnyíti a fenti fordulat egyértelmű meghatározását. Azon kérdés mérlegelésénél ugyanis, hogy mely sorozatok elégítik ki az adott mondatfüggvényt, mindig az f sorozat bizonyos tagjainak a vizsgált függvény szabad változóihoz való azon egyértelmű hozzárendelését fogjuk szem előtt tartani, amely minden változónak a sorozat vele azonos indexű tagját (azaz a v_k változónak az f_k tagot) felelteti meg, azokat a tagokat pedig, amelyek egy változóhoz sincsenek hozzárendelve, figyelmen kívül hagyjuk.[40] Az eljárást legjobban konkrét példákon magyarázhatjuk el. Tekintsük pl. a korábban már tárgyalt $\bigcap_2 \iota_{1,2}$ függvényt. Ennek a függvénynek csak egy szabad változója van, a v_1, tehát a sorozatoknak mindig csak az első tagját tekintjük. Éspedig azt mondjuk, hogy *osztályok egy f végtelen sorozata a $\bigcap_2 \iota_{1,2}$ mondatfüggvényt akkor és csak akkor elégíti ki*, ha az f_1 osztály a korábbi értelemben kielégíti ezt a függvényt, azaz *ha tetszőleges*

[40] Ez egyébként tisztán technikai jellegű könnyítés. Ha esetleg nem tudnánk egy adott nyelv összes változóját sorozatba rendezni (pl. azért, mert megengedett volna tetszőleges alakú szimbólumok változóként való használata), akkor megtehetnénk, hogy minden adott kifejezésben külön-külön megszámozzuk az összes jelet, s így az összes változót is, pl. a kifejezésben való előfordulásuk természetes sorrendje alapján: a bal szélen álló jelet neveznénk az elsőnek, a következőt a másodiknak stb. Ezen a módon újra előállíthatnánk egy hozzárendelést az adott függvény szabad változói és a sorozat bizonyos tagjai között. Ez a hozzárendelés persze a vizsgált függvény alakjával együtt változna (ellentétben a szövegben leírt hozzárendeléssel); ez elég komoly bonyodalmakhoz vezetne az alább kimondandó 22. def., közelebbről a (γ) és (δ) feltétel megfogalmazásánál.

b osztályra $f_1 \subseteq b$. Hasonlóképpen *osztályok egy f végtelen sorozata az $\iota_{2,3}$ mondatfüggvényt akkor és csak akkor elégíti ki*, ha az f_2 és f_3 osztályok a korábbi értelemben kielégítik a függvényt, azaz *ha $f_2 \subseteq f_3$*. Általánosan a következőképpen írható le ez az eljárás.

Tekintsük az alábbi sémát:

Az f sorozat kielégíti az x mondatfüggvényt akkor és csak akkor, ha f osztályok végtelen sorozata és p.

Az osztálykalkulus egy mondatfüggvénye esetében ebben a sémában az ‚x' szimbólumot az illető függvénynek a metanyelvben képezett (strukturális-leíró) egyedi nevével helyettesítjük, ‚p'-t pedig egy olyan kifejezéssel, amelyet a vizsgált függvényből úgy nyerünk, hogy lefordítjuk azt a metanyelvre, és egyúttal benne minden v_k, v_l stb. szabad változót a megfelelő ‚f_k', ‚f_l' stb. szimbólummal helyettesítünk.

A rekurzív módszer alkalmazásával szerkesztünk olyan általános definíciót arra, hogy egy mondatfüggvényt mikor elégít ki osztályok egy sorozata, amely speciális esetként tartalmaz minden részleges definíciót, amelyet a fenti sémából a most leírt módon nyerhetünk. Tekintettel a mondatfüggvény definíciójára, ehhez elegendő, ha megadjuk, mely sorozatok elégítik ki az $\iota_{k,l}$ inklúziókat, továbbá rögzítjük, hogyan viselkedik a vizsgált fogalom, ha a mondatfüggvényeken végrehajtjuk a három alapműveletet: a negálás, az összeadás és az univerzális kvantifikáció (generalizáció) valamelyikét.

Itt különös figyelmet érdemel az univerzális kvantifikáció művelete. Legyen x tetszőleges mondatfüggvény, és tegyük fel, hogy már tudjuk, mely sorozatok elégítik ki az x függvényt. A szóban forgó művelet tartalmát tekintve, az f sorozatról akkor állíthatjuk, hogy kielégíti a $\bigcap_k x$ függvényt (ahol k egy meghatározott természetes szám), ha a sorozat maga kielégíti az x függvényt, és ez akkor is így marad, ha a sorozat k-adik tagját tetszőleges módon változtatjuk; más szóval, ha minden sorozat, amely az adott sorozattól legfeljebb a k-adik helyen különbözik, kielégíti az x függvényt. Így pl. a $\bigcap_2 \iota_{1,2}$ függvényt olyan és csak olyan f sorozat elégíti ki, amely az $f_1 \subseteq f_2$ formulát igazzá teszi, mégpedig tekintet nélkül arra, hogyan változtatjuk a sorozat második tagját (mint könnyen látható, ez csak úgy lehetséges, ha az első tag az üres osztály).

Ezen magyarázatok után nem fog az olvasónak különösebb nehézséget okozni a következő definíció megértése.

22. DEFINÍCIÓ. *Az f sorozat kielégíti az x mondatfüggvényt akkor és csak akkor, ha f osztályok olyan végtelen sorozata, x pedig olyan mondatfüggvény, hogy kielégítik a következő négy feltétel egyikét: (α) van olyan k és l természetes szám, hogy $x = \iota_{k,l}$ és $f_k \subseteq f_l$; (β) van olyan y mondatfüggvény, hogy $x = \bar{y}$, és f nem elégíti ki az y függvényt; (γ) van olyan y és z mondatfüggvény, hogy $x = y+z$, és f vagy y-t, vagy z-t kielégíti; (δ) van olyan k szám és y mondatfüggvény, hogy $x = \bigcap_k y$, és osztályok minden olyan végtelen sorozata, amely f-től legföljebb a k-adik helyen különbözik, kielégíti az y függvényt.*[41]

[41] A fenti rekurzív definícióval ekvivalens normális definíció így szól (vö. 36. lj.):

Az f sorozat kielégíti az x mondatfüggvényt akkor és csak akkor, ha fRx fennáll minden olyan R reláció esetén, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

Íme néhány példa arra, hogyan alkalmazzuk a fenti definíciót konkrét mondatfüggvényekre: az f végtelen sorozat kielégíti az $\iota_{1,2}$ függvényt akkor és csak akkor, ha $f_1 \subseteq f_2$, az $\overline{\iota_{2,3}}+\overline{\iota_{3,2}}$ inklúziót pedig akkor és csak akkor, ha $f_2 \neq f_3$; a $\bigcap_2 \iota_{1,2}$, ill. $\bigcap_2 \iota_{2,3}$ függvényt azok és csak azok az f sorozatok elégítik ki, amelyekben f_1 az üres osztály, ill. f_3 az univerzális osztály (azaz az összes individuum osztálya); végül osztályok minden végtelen sorozata kielégíti az $\iota_{1,1}$ függvényt, és egyetlen ilyen sorozat sem elégíti ki az $\iota_{1,2}\cdot\overline{\iota_{1,2}}$ függvényt.[a)]

A most definiált fogalomnak kiemelkedő jelentősége van a nyelv szemantikájára vonatkozó vizsgálatokban. Segítségével könnyen definiálható ezen terület számos fogalma,

Tetszőleges g-re és y-ra gRy fennállásának szükséges és elégséges feltétele annak teljesülése, hogy g osztályok végtelen sorozata, y mondatfüggvény, továbbá vagy (α) vannak olyan k és l természetes számok, hogy $y = \iota_{k,l}$ és $g_k \subseteq g_l$; vagy (β) van olyan z mondatfüggvény, hogy $y = \bar{z}$ és a gRz formula nem áll fenn; vagy (γ) van olyan z és t mondatfüggvény, hogy $y = z+t$, és emellett gRz vagy gRt; vagy pedig (δ) van olyan k természetes szám és z mondatfüggvény, hogy $y = \bigcap_k z$ és hRz fennáll osztályok minden olyan h végtelen sorozatára, amely g-től legfeljebb a k-adik helyen különbözik.

[a)] Az első megállapítás helyessége azon múlik, hogy a metaelméletben tudjuk: minden osztály része önmagának. Ez tartalmilag megfelel a tárgyelmélet első szakmai axiómájának. A 4. §-ban említi Tarski, hogy a metaelméletben a tárgynyelvi axiómáknak mindig a bizonyítható tételek közé kell tartozniok. Az osztálykalkulus esetén ezt azért nem szükséges külön említeni, mert a metaelmélet általános logikai axiómái bőven elegendőek az osztálykalkulus tételeinek bizonyításához. – A második megállapítás pedig a metaelmélet ellentmondástalanságát előfeltételezi.

így pl. a jelölés, a definiálhatóság[42] és az igazság fogalma, mely utóbbi bennünket itt elsősorban érdekel.

Az igazság fogalmához a következő módon jutunk el. A 22. def. és az azt megelőző szemléletes jellegű vizsgálódások alapján könnyen beláthatjuk, hogy az a kérdés, kielégít-e egy adott sorozat egy adott mondatfüggvényt, a sorozatnak csak azoktól a tagjaitól függ, amelyek (indexük tekintetében) megfelelnek az adott mondatfüggvény szabad

[42] Azt mondani, hogy az x név egy adott a tárgyat jelöl, ugyanaz, mint megállapítani, hogy az a tárgy (ill. minden olyan sorozat, amelynek a a megfelelő tagja) kielégít egy meghatározott típusú mondatfüggvényt. A köznyelvben itt pl. olyan mondatfüggvényről lehet szó, amely három részből áll a következő sorrendben: egy változó, a ‚nem más mint' kifejezés, és az adott x név. – Ami a definiálhatóság fogalmát illeti, ennek tartalmát csak egy speciális esetben kísérlem meg meghatározni. Ha azt nézzük, hogy az osztályok mely tulajdonságait tekintjük (az osztálykalkulus itt tárgyalt rendszerén belül) definiálhatóknak, a következő megfogalmazásokhoz jutunk:

Azt mondjuk, hogy az x mondatfüggvény meghatározza a P osztálytulajdonságot akkor és csak akkor, ha – valamely k természetes számra – (α) x-nek v_k az egyetlen szabad változója, és (β) ahhoz, hogy az f végtelen osztálysorozat kielégítse x-et, szükséges és elégséges, hogy f_k rendelkezzen a P tulajdonsággal: azt mondjuk, hogy P tulajdonság definiálható akkor és csak akkor, ha van olyan x mondatfüggvény, amely P-t meghatározza.

Ezen megállapítások alapján megmutathatnánk pl., hogy olyan osztálytulajdonságok, mint hogy egy osztály üres, avagy egy, két, három stb. elemet tartalmaz, definiálhatóak. Nem definiálható viszont az a tulajdonság, hogy végtelen sok elemet tartalmaz (vö. alább a 14–16. tételekhez kapcsolódó megjegyzésekkel). Az is látható, hogy ezen értelmezés mellett a definiálhatóság fogalma egyáltalán nem függ attól, hogy a vizsgált tudomány formalizálása lehetővé teszi-e definíciók alkotását (vö. 11. lj.). A definiálhatóságról pontosabb fejtegetések találhatók Tarski 1931a-ban és [VI]-ban.

változóinak. A szélső esetben tehát, amikor a vizsgált függvény mondat, azaz egyáltalán nem tartalmaz szabad változót (amit a 22. def. semmiképp sem zár ki), az, hogy egy sorozat kielégít-e egy függvényt, egyáltalán nem függ a sorozat tagjainak tulajdonságaitól. Ezek után csak két lehetőség marad: vagy osztályok bármely végtelen sorozata kielégíti az adott mondatot, vagy egyetlen sorozat sem (vö. az alább szereplő A és B lemmával). Az előbbi csoportba tartozó mondatok, pl. $\bigcup_1 \iota_{1,1}$, éppen az *igaz mondatok*;[b] az utóbbiba tartozó mondatokat, pl. $\bigcap_1 \overline{\iota_{1,1}}$-t, ennek megfelelően, hamis mondatoknak mondhatjuk.[42*]

23. Definíció. *x **igaz mondat** – szimbolikusan: $x \in Ver$ – akkor és csak akkor, ha $x \in S$, és osztályok bármely végtelen sorozata kielégíti x-et.*[43]

[b] Az, hogy osztályok minden végtelen sorozata kielégíti a „$\exists x(x \subseteq x)$" tárgynyelvi mondatot, a kielégítés definíciója folytán akkor és csak akkor igaz, ha van olyan osztály, amely része önmagának. Mivel minden osztály része önmagának, e feltétel biztosan teljesül, ha egyáltalán *vannak osztályok*. Ezt pedig a metaelmélet logikájából tudjuk.

[42*] Az igazság definiálásának egy módszerét, mely lényegében ekvivalens az e munkában kifejtett módszerrel, noha más ötletre épül, McKinsey 1948 javasolta.

[43] Az egész fenti konstrukcióban operálhatnánk végtelen sorozatok helyett változó számú tagból álló véges sorozatokkal is. Ez esetben célszerű volna általánosítani a véges sorozat fogalmát: ezen terminus eddigi értelmezése mellett (vö. 27.) ha egy sorozatnak van n-edik tagja, kell hogy legyen k-adik tagja is minden n-nél kisebb k indexre – mármost ettől a körülménytől eltekintenénk, és minden olyan egyértékű relációt, melynek képtartománya véges sok, 0-tól különböző természetes számból áll, véges sorozatnak mondanánk. A konstrukció módosítása annyiból állna, hogy azokból a sorozatokból, amelyek kielégítik az adott mondatfüggvényt, kiküszöbölnénk minden olyan „fölösleges" tagot, amely nincs befolyással arra, kielégíti-e a sorozat a

Ezek után mindenekelőtt az a kérdés vethető fel, hogy a most megadott definíció, melynek formális szabatossága minden kétely fölött áll, vajon tartalmilag is helytálló-e, legalábbis abban az értelemben, amelyet előzőleg a **V** konvencióban rögzítettünk. Meg lehet mutatni, hogy erre a kérdésre a válasz pozitív: *a 23. definíció a* **V** *konvenció értelmében helytálló definíciója az igazságnak*, mivel maga után von minden, a konvencióban említett következményt. Azonban nehézség nélkül átlátható (már csak abból is, hogy ezeknek a következményeknek a számossága végtelen), hogy ennek a ténynek az egzakt és általános megindoklása nem fér el az eddigi vizsgálódások keretei között. A bizonyításhoz egy teljesen új apparátus felépítésére volna szükség, éspedig mindenekelőtt az – egy fokkal magasabban fekvő – meta-metatudományra való áttérésre, melyen belül meg-

---

függvényt: ha a függvényben v_k, v_l stb. (természetesen véges számban) lépnek fel szabad változóként, akkor abban a sorozatban, amely kielégíti a függvényt, csakis k, l stb. indexű tagok maradnának; így pl. az $\iota_{2,4}$ függvényt azok és csak azok az f osztálysorozatok elégítenék ki, amelyek csak két tagból: f_2-ből és f_4-ből állnak, és igazzá teszik az $f_2 \subseteq f_4$ formulát. Jól látható egy ilyen módosítás értéke a természetesség és a szokásos eljárással való egyezés szempontjából; a pontos kivitelezés esetén azonban fellépnek bizonyos hátrányok: a 22. def. bonyolultabb alakot ölt. Ami az igazság fogalmát illeti, meg kell jegyeznünk, hogy a fenti felfogás szerint mondatot, azaz szabad változó nélküli függvényt csak egyetlen sorozat, ti. az egy tagot sem tartalmazó, „üres" sorozat elégíthet ki; igaznak tehát azokat a mondatokat kellene mondanunk, amelyeket az „üres" sorozat ténylegesen ki is elégít. Ennek a definíciónak a mesterkélt volta bizonyára megütközést keltene mindazokban, akik számára a matematikai konstrukcióban szokásos speciális eljárások nem eléggé ismerősek.

történhetne annak a metatudománynak a formalizálása amely vizsgálódásunk alapját képezi.[38] De ha nem akarjul elhagyni az eddigi megfontolások talaját, akkor csak a empirikus út marad – a 23. def. említett tulajdonságánal konkrét példák során való igazolása.

Vizsgáljuk pl. a $\bigcap_1 \bigcup_2 \iota_{1,2}$, azaz a $,\prod x,N\prod x,,NIx,x,,$ mondatot. A 22. def. szerint az $\iota_{1,2}$ mondatfüggvényt azol és csak azok az f osztálysorozatok elégítik ki, amelyekr $f_1 \subseteq f_2$, negációját pedig, azaz a $\overline{\iota_{1,2}}$ függvényt csak azok sorozatok, amelyekre $f_1 \nsubseteq f_2$ fennáll. Ennek következtébe egy f sorozat csak akkor elégíti ki a $\bigcap_2 \overline{\iota_{1,2}}$ függvényt, h minden olyan g sorozat, amely legföljebb a második helye különbözik f-től, kielégíti a $\overline{\iota_{1,2}}$ függvényt, azaz igazzá tesz a $g_1 \nsubseteq g_2$ formulát; mivel $g_1 = f_1$, és a g_2 osztály teljese tetszőleges lehet, a $\bigcap_2 \overline{\iota_{1,2}}$ függvényt csak olyan f sorozato elégítik ki, amelyekre, tetszőleges b osztályt véve, $f_1 \nsubseteq$ teljesül. Ha hasonló módon következtetünk tovább, az az eredményt kapjuk, hogy az f sorozat az $\bigcup_2 \iota_{1,2}$ függvényt azaz a $\bigcap_2 \overline{\iota_{1,2}}$ függvény negációját csak akkor elégíti ki ha van olyan b osztály, melyre fennáll $f_1 \subseteq b$; ezt folytatva a $\bigcap_1 \bigcup_2 \iota_{1,2}$ mondatot egy tetszőleges f sorozat csak akko elégít ki, ha bármely a osztályhoz van olyan b osztály, hog $a \subseteq b$. Ha végül alkalmazzuk a 23. definíciót, rögtön meg kapjuk azon tételek egyikét, amelyeket a **V** konvenció (α feltétele ír le:

$\bigcap_1 \bigcup_2 \iota_{1,2} \in$ *Ver akkor és csak akkor, ha tetszőleges a osztályhoz van olyan b osztály, hogy* $a \subseteq b$.

Innen most már, az osztálykalkulus ismert tételeinek fel használásával, könnyen következtetünk arra, hogy $\bigcap_1 \bigcup_2 \iota_{1,2}$ igaz mondat.[c)]

Egészen hasonlóan járhatunk el a vizsgált nyelv bármely mondata esetében: ha egy ilyen mondathoz megkonstruálunk egy neki megfelelő, az (α) feltételben leírt állítást, és ugyanazt a következtetési eljárást alkalmazzuk, mint fent, a legkisebb nehézség nélkül bebizonyíthatjuk, hogy az illető állítás következménye az igazság általunk elfogadott definíciójának. Számos esetben a logika (az állítás- és az osztálykalkulus) legegyszerűbb törvényeinek felhasználása is elegendő már ahhoz, hogy az ily módon nyert tételekből következtetéseket vonjunk le a vizsgált mondatok igazságára, ill. hamisságára vonatkozóan: így pl. $\bigcap_1 \bigcup_2 (\iota_{1,2} + \overline{\iota_{1,2}})$ igaz, $\bigcap_1 \bigcap_2 \overline{\iota_{1,2}}$ hamis mondatnak bizonyul. Más mondatok, pl. a

$$\bigcap_1 \bigcap_2 \bigcap_3 (\iota_{1,2} + \iota_{2,3} + \iota_{3,1})$$

mondat vagy a negációja vonatkozásában nem tudjuk eldönteni a hasonló kérdést (legalábbis addig nem, amíg nem nyúlunk a metatudomány sajátos egzisztenciális előfeltevéseihez[d)] – vö. 92.): ti. a 23. def. önmagában nem ad

[c)] A metaelméletben tudjuk, hogy minden osztály része valamely osztálynak (pl. önmagának, lásd az *a)*, *b)* jegyzeteket); ennek alapján a tárgynyelvi „$\forall x \exists y (x \subseteq y)$" mondat valóban igaz (a 23. def. értelmében).

[d)] A metaelmélet általános logikai axiómái nem teszik lehetővé a

$$\forall x\ \forall y\ \forall z[(x \subseteq y) \vee (y \subseteq z) \vee (z \subseteq x)]$$

mondat igazságának eldöntését. Ha a metaelméletben azt is tudjuk, hogy van legalább három (különböző) egyelemű osztály, akkor a most

általános kritériumot egy mondat igazságára.[44] Mindazonáltal a nyert tételek révén világossá és egyértelművé válik a megfelelő „$x \in Ver$" alakú kifejezések jelentése. – Meg kell még jegyeznünk, hogy a **V** konvenció (β) feltételében említett tétel is nyilvánvaló következménye definíciónknak.

Ezen megfontolások által az olvasó kétségtelenül eljut a szubjektív bizonyossághoz afelől, hogy a 23. definíciónak ténylegesen megvan az a tulajdonsága, amelyet kívánunk tőle: eleget tesz a **V** konvenció összes feltételének. Hogy megerősítsük az így nyert meggyőződést a megszerkesztett definíció tartalmi helyességéről, érdemes megismerkednünk néhány belőle levezethető, jellemző általános tétellel. Hogy ne terheljem túl a dolgozatot tisztán deduktív anyaggal, ezeket a tételeket pontos bizonyítás nélkül említem meg.[45]

idézett tárgynyelvi mondat egyértelműen hamisnak bizonyul. És ezt valóban tudjuk a metaelméletben, bár nem az általános logikai axiómák alapján, hanem a 2. § 1–5. axiómáiból; hiszen bármely tárgynyelvi kifejezést befoglalhatunk egy egyelemű osztályba, és van három (sőt végtelen sok) különböző kifejezésünk (lásd a 2. § *b)* jegyzetét).

[44] Ez egyébként, legalábbis metodológiai szempontból, egyáltalán nem hiányossága a vizsgált definíciónak; definíciónk ebben a tekintetben nem különbözik a deduktív tudományokban előforduló definíciók jelentős részétől.

[45] A bizonyítások a logika általános törvényein, a metatudomány sajátos axiómáin és a tételekben fellépő fogalmak definícióján alapulnak. Néhány esetben jelezzük olyan fogalmak, mint a következmény, a deduktív rendszer stb. általános tulajdonságainak – melyeket [II]-ben fejtettem ki – felhasználását. Az ott elért eredményeket jogosan alkalmazzuk, mert könnyen megmutatható, hogy a mondat és a következmény itt bevezetett fogalma eleget tesz az összes axiómának, amelyre az említett munka támaszkodik.

1. TÉTEL. (Az ellentmondás törvénye.) *Tetszőleges x mondatra fennáll vagy* $x \mathrel{\overline{\in}} Ver$, *vagy* $\bar{x} \mathrel{\overline{\in}} Ver$.

Ez majdnem közvetlen következménye a 22. és a 23. def.-nak.

2. TÉTEL. (A kizárt harmadik törvénye.) *Tetszőleges x mondatra fennáll vagy* $x \in Ver$, *vagy* $\bar{x} \in Ver$.

A bizonyításban lényeges szerepet játszik az alábbi lemma, amely a 11. és a 22. def.-ból következik:

A LEMMA. *Ha az f sorozat kielégíti az x mondatfüggvényt, és a g végtelen osztálysorozat eleget tesz a következő feltételnek: minden olyan k-ra, amelyre* v_k *szabad változója az x függvénynek,* $f_k = g_k$, *akkor a g sorozat is kielégíti az x függvényt.*

Ennek a lemmának és a 12. def.-nak közvetlen következményeként kapjuk a B lemmát, amely a 22. és 23. def.-val együtt már könnyen kiadja a 2. tételt.

B LEMMA. *Ha* $x \in S$, *és az x mondatot legalább egy végtelen osztálysorozat kielégíti, akkor x-et bármely osztálysorozat kielégíti.*

3. TÉTEL. *Ha* $X \subseteq Ver$, *akkor* $Cn(X) \subseteq Ver$; *következésképp* $Cn(Ver) \subseteq Ver$.

Ezt a tételt teljes indukcióval bizonyíthatjuk, főképp a 15., 16., 22. és 23. def.-ra támaszkodva; közben hasznát vehetjük a következő egyszerű lemmának is:

C LEMMA. *Ha y generalizációja az x mondatfüggvénynek, akkor annak, hogy x-et osztályok bármely végtelen sorozata kielégítse, szükséges és elegendő feltétele, hogy y-t osztályok bármely végtelen sorozata kielégítse.*

Az 1–3. tételekben kimondott eredmények összegezéseként (a 18–20. def. segítségével) a következő tételt kapjuk:

4. TÉTEL. ***A Ver osztály ellentmondásmentes és teljes deduktív rendszer.***

5. TÉTEL. ***Minden bizonyítható mondat igaz mondat; másképp:*** $Pr \subseteq Ver$.

Ez a tétel közvetlenül következik a 17. def.-ból, a 3. tételből és a D lemmából, melynek bizonyítása (többek között a 13. def. és a C lemma alapján) semmi nehézséget nem okoz:

D LEMMA. *Minden axióma igaz mondat.*[e)]

Az 5. tétel nem fordítható meg:

6. TÉTEL. *Vannak olyan igaz mondatok, amelyek nem bizonyíthatók; másképp:* $Ver \nsubseteq Pr$.

Ez közvetlen következménye a 2. tételnek és az alábbi lemmának, melynek egzakt bizonyítása nem egészen egyszerű:[f)]

[e)] A bizonyításhoz aprólékosan ki kellene mutatni – a 23. def. értelmében –, hogy az axiómákat az osztályok minden végtelen sorozata kielégíti.

[f)] Az E lemma szerint sem „$\forall x \forall y(x \subseteq y)$”, sem a negációja nem bizonyítható az osztálykalkulusban. Ezt igazolja a következő megfontolás. (1) Tegyük föl, hogy egyetlen osztályunk van: az üres osztály. Ekkor az osztálykalkulus összes szakmai axiómái (lásd a 2. § *e)* jegyzetét) triviálisan teljesülnek, és az említett mondat is igaz e modellben. (2) Tekintsük egy *nemüres* osztály összes részosztályainak összességét. Az osztálykalkulus szakmai axiómái ebben az interpretációban is igazaknak bizonyulnak, viszont az idézett mondat itt nyilvánvalóan hamis. (3) Ha „$\forall x \forall y(x \subseteq y)$” (vagy a negációja) bizonyítható lenne az osztálykalkulusban, akkor igaznak kellene lennie minden olyan interpretációban, amelyben az axiómák igazak. De az (1) interpretációban e formula igaz (és negációja hamis), a (2) interpretációban pedig e formula hamis (és negációja igaz); tehát sem e formula, sem negációja nem lehet bizonyítható. – A metaelmélet alapján viszont tudjuk, hogy „$\sim \forall x \forall y(x \subseteq y)$” igaz (lásd a *d)* jegyzetet).

E LEMMA. *Sem* $\bigcap_1 \bigcap_2 \iota_{1,2} \in Pr$, *sem* $\overline{\bigcap_1 \bigcap_2 \iota_{1,2}} \in Pr$ *nem áll* fenn.[46]

Az 1., 5. és 6. tételek további következményeként megemlítem még a következő tételt:

7. TÉTEL. *A Pr osztály ellentmondásmentes, de nem teljes deduktív rendszer.*

A deduktív tudományok metodológiája terén jelenleg folyó kutatásokban[47] (különösképpen a Hilbert körül csoportosuló göttingeni iskola

A 46. jegyzetben Tarski megemlíti, hogy ha a „$\sim \forall x \forall y(x \subseteq y)$" mondatot is fölvennénk axiómának (ahogyan pl. Huntington is fölteszi, hogy van legalább két különböző osztály, lásd a 2. § *d)* jegyzetét), még akkor is lenne olyan mondat, amely nem bizonyítható és nem is cáfolható, pl.

$$\forall x\, \forall y[(x \subseteq y) \vee (y \subseteq x)].$$

E mondat igaz egy egyelemű osztály részosztályainak összességén (amikor csupán két osztályunk van: $\emptyset$ és U), de hamis egy többelemű osztály részosztályainak összességén (ha U n-elemű, akkor 2^n részosztályunk van); így sem ő, sem a negációja nem lehet bizonyítható.

[46] Ha a $\overline{\bigcap_1 \bigcap_2 \iota_{1,2}}$ mondatot hozzácsatoljuk az elfogadott mondatokhoz (ami gyakori eset – vö. 37. lj.), akkor itt az E lemma helyett az E′ lemmára hivatkozhatnánk:

E′ LEMMA. *Sem* $\bigcap_1 \bigcap_2 (\iota_{1,2} + \iota_{2,1}) \in Pr$,

sem $\overline{\bigcap_1 \bigcap_2 (\iota_{1,2} + \iota_{2,1})} \in Pr$ *nem áll fenn.*

Mindkét lemma bizonyításának alapötlete ugyanaz, mint az ún. *szűkebb függvénykalkulus* ellentmondás-mentességének és nemteljességének bizonyításáé, lásd HILBERT & ACKERMANN 1928, 65–68.

[47] Ha az olvasó nem érdeklődik különösebben a deduktív tudományok metodológiájának speciális fogalmai és vizsgálódásai iránt, a 3. és 4. § apró betűs fejtegetéseit a relativizált fogalmakról kihagyhatja (jelen munka alapeszméjével csak a 141–2. oldalon olvashatók állnak szorosabb összefüggésben).

munkáiban) az igazság abszolút fogalmánál, melyről eddig szó volt, jóval jelentősebb szerepet játszik egy viszonylagos jellegű fogalom, ti. az *egy* a *individuumtartományon helyes vagy igaz mondat* fogalma.[48] Ez alá – egészen általánosan és pontatlanul szólva – azokat a mondatokat soroljuk, amelyek a szokásos értelemben igazak volnának, ha a vizsgálat terjedelmét egy adott *a* osztályba tartozó individuumokra korlátoznánk, avagy – kissé pontosabban – megegyeznénk abban, hogy az ‚individuum', ‚individuumok osztálya' stb. terminusokat rendre mint „az *a* osztály eleme", „az *a* osztály részosztálya" stb. interpretáljuk. Ha konkrétan az osztálykalkulus nyelvének mondatairól volna szó, akkor a „$\prod xp$" típusú kifejezéseket „az *a* osztály minden *x* részosztályára *p*", az „Ixy" típusú kifejezéseket pedig „az *a* osztály *x* részosztálya része az *a* osztály *y* részosztályának" értelmében kellene interpretálnunk. Az említett fogalom pontos definíciójához a 22. és 23. def. módosításával jutunk el; levezetett fogalomként bevezetjük a *k-elemű individuumtartományon helyes mondat* és a *minden individuumtartományon helyes mondat* fogalmát. Figyelemre méltó, hogy ezekkel a fogalmakkal – a metamatematikai vizsgálatokban játszott igen jelentős szerepük ellenére – eddig kizárólag szemléletes értelemben foglalkoztak, nem kísérelték meg, hogy jelentésüket pontosabban meghatározzák.[49]

[48] Vö. ehhez pl. HILBERT & ACKERMANN 1928, különösen 72–81., és BERNAYS & SCHÖNFINKEL 1928. Hangsúlyoznunk kell azonban, hogy az említett szerzők a vizsgált fogalmakat nem mondatokra, hanem szabad változókat tartalmazó mondatfüggvényekre vonatkoztatják, (mivel a szűkebb függvénykalkulus nyelvében, amellyel foglalkoznak, a szó szigorú értelmében nincsenek is mondatok), és ezzel összefüggésben az ‚igaz' vagy ‚helyes' terminus helyett az ‚általánosan érvényes'-t használják; vö. ehhez a hivatkozott munkák közül a másodikat, 347–348.

[49] Kivételt képez HERBRAND 1930, amelyben a szerző definiálja a véges tartományon igaz mondat fogalmát (108–112.). Herbrand definíciójának szövegünk 25. és 26. definíciójával való összevetése az olvasót nyomban arra a következtetésre fogja vezetni, hogy itt inkább a terminusok egybehangzásáról, mintsem a tartalom rokonságáról van szó. Mindazonáltal lehetséges, hogy bizonyos konkrét tudományok vonatkozásában a megfelelő metatudományt illető speciális előfeltevések

E Lemma. *Sem* $\bigcap_1 \bigcap_2 \iota_{1,2} \in Pr$, *sem* $\overline{\bigcap_1 \bigcap_2 \iota_{1,2}} \in Pr$ *nem áll* fenn.[46]

Az 1., 5. és 6. tételek további következményeként megemlítem még a következő tételt:

7. Tétel. *A Pr osztály ellentmondásmentes, de nem teljes deduktív rendszer.*

A deduktív tudományok metodológiája terén jelenleg folyó kutatásokban[47] (különösképpen a Hilbert körül csoportosuló göttingeni iskola

---

A 46. jegyzetben Tarski megemlíti, hogy ha a „$\sim \forall x \forall y(x \subseteq y)$" mondatot is fölvennénk axiómának (ahogyan pl. Huntington is fölteszi, hogy van legalább két különböző osztály, lásd a 2. § *d)* jegyzetét), még akkor is lenne olyan mondat, amely nem bizonyítható és nem is cáfolható, pl.

$$\forall x\, \forall y[(x \subseteq y) \vee (y \subseteq x)].$$

E mondat igaz egy egyelemű osztály részosztályainak összességén (amikor csupán két osztályunk van: $\emptyset$ és U), de hamis egy többelemű osztály részosztályainak összességén (ha U n-elemű, akkor 2^n részosztályunk van); így sem ő, sem a negációja nem lehet bizonyítható.

[46] Ha a $\overline{\bigcap_1 \bigcap_2 \iota_{1,2}}$ mondatot hozzácsatoljuk az elfogadott mondatokhoz (ami gyakori eset – vö. 37. lj.), akkor itt az E lemma helyett az E′ lemmára hivatkozhatnánk:

E′ lemma. *Sem* $\bigcap_1 \bigcap_2 (\iota_{1,2} + \iota_{2,1}) \in Pr$,

sem $\overline{\bigcap_1 \bigcap_2 (\iota_{1,2} + \iota_{2,1})} \in Pr$ *nem áll fenn.*

Mindkét lemma bizonyításának alapötlete ugyanaz, mint az ún. *szűkebb függvénykalkulus* ellentmondás-mentességének és nemteljességének bizonyításáé, lásd Hilbert & Ackermann 1928, 65–68.

[47] Ha az olvasó nem érdeklődik különösebben a deduktív tudományok metodológiájának speciális fogalmai és vizsgálódásai iránt, a 3. és 4. § apró betűs fejtegetéseit a relativizált fogalmakról kihagyhatja (jelen munka alapeszméjével csak a 141–2. oldalon olvashatók állnak szorosabb összefüggésben).

Figyelemre méltó, hogy ha elemezzük a 28. tétel és a hozzá vezető lemmák bizonyítását, általános strukturális kritériumot kaphatunk a vizsgált nyelv bármely mondatának igazságára: a 28. tételből könnyen levezethetünk ilyen kritériumot a kvantitatív mondatokra, és a K lemma bizonyítása lehetővé teszi, hogy a nyelv minden mondatához effektíve hozzárendeljünk egy vele ekvivalens mondatot, amely – amennyiben nem kvantitatív – nyilvánvalóan igaz vagy pedig nyilvánvalóan hamis. Hasonló megjegyzés érvényes az egy bizonyos, ill. minden individuumtartományon való helyesség fogalmára.

Összefoglalva a jelen szakasz legfontosabb eredményeit, a következőket állapíthatjuk meg:

Sikerült az osztálykalkulus nyelvéhez realizálnunk azt, amivel előzőleg a köznyelv tekintetében eredménytelenül kísérleteztünk, éspedig az ‚igaz mondat' terminus formailag szabatos és tartalmilag helytálló szemantikai definíciójának megszerkesztését.

Továbbá az osztálykalkulus sajátos tulajdonságainak kihasználásával képesek voltunk ezt a definíciót átalakítani egy vele ekvivalens definícióvá, amelyből ráadásul általános igazságkritérium is levezethető a vizsgált nyelv mondataihoz.

SZERKESZTŐI KOMMENTÁR

Néhány megjegyzést fűzünk Tarski igazságdefiníciójához.

(*A*) *A kielégítésreláció elhagyhatósága.* Az osztálykalkulus nyelvére vonatkozóan az igaz mondatok *Ver* osztályának meghatározását a 23. def. tartalmazza. Ez alapvetően a 22. def.-ra támaszkodik, amely az „f sorozat *kielégíti* az x mondatfüggvényt" relációt értelmezi. Napjainkban elterjedtebb ehelyett egy másik reláció használata, amelyet a következő szavakkal fejezhetünk ki: „A (nyitott vagy zárt) p mondat *igaz* a V értékelés szerint." Itt *értékelésen* olyan V függvényt értünk, amely minden változóhoz hozzárendel egy-egy alkalmas típusú objektumot mint a változó szemantikai értékét. (Az osztálykalkulus nyelve esetén ezek az objektumok *osztályok* lehetnek, pl. egy rögzített U osztály részosztályai. A Tarski-féle f sorozatok mindegyikét egy-egy ilyen értékelő függvény helyettesíti.) E reláció tömör értelmezése érdekében jelölje „$V[p] = 1$" azt, hogy „p igaz a V értékelés szerint" (tagadása: „$V[p] \neq 1$"), továbbá használjuk a ‚$\Leftrightarrow$' jelet az ‚akkor és csak akkor, ha' kifejezés rövidítésére. E megállapodásokkal „p igaz a V értékelés szerint" rekurzív definícióját az alábbi (*a*) – (*d*) kikötések tartalmazzák:

(*a*) Ha x és y változók: $(V[Ixy] = 1) \Leftrightarrow (V(x) \subseteq V(y))$. ?
(*b*) $(V[Np] = 1) \Leftrightarrow (V[p] \neq 1)$.
(*c*) $(V[Apq] = 1) \Leftrightarrow (V[p] = 1$, vagy $V[q] = 1)$.
(*d*) $\left(V\left[\prod x \cdot p\right] = 1\right) \Leftrightarrow (V'[p] = 1$ minden olyan V' értékelésre, amely legföljebb x értékében különbözik V-től).

Ezt használva a 22. def. helyett, a 23. def. helyére ez lép:

A zárt p mondat igaz ($p \in Ver$) $\Leftrightarrow$ minden V értékelésre $V[p] = 1$.

Könnyen igazolható az A és a B lemma analogonja, s ezek folytán nyerjük, hogy ha α zárt mondat, akkor vagy minden értékelés szerint igaz, vagy egyetlen értékelés szerint sem igaz. Megjegyezzük, hogy a nyitott mondatok között is vannak olyanok, amelyek minden értékelés szerint igazak; pl. (a mi jelölésünket használva) „$(x \subseteq y) \vee \sim (x \subseteq y)$" és „$(x \subseteq x)$". Így az igazság fogalma kiterjeszthető lenne a nyitott mondatokra is.

Ez az eljárás a legtöbb formalizált nyelvre alkalmazható (kisebb módosításokkal), így mindazokra a nyelvekre, amelyeket Tarski e tanulmányában említ.

(*B*) *Pr és Ver kapcsolata.* Hasonlítsuk össze a bizonyítható mondatok osztályának (*Pr*) és az igaz mondatok osztályának (*Ver*) definícióját. Az előbbi a 2. § 17. def.-ja, mely az 1 – 16. definíciókra támaszkodik. Ezek a meghatározások, Tarski szóhasználata szerint, tisztán strukturális jellegűek, azaz grammatikai természetűek. Így végül is az, hogy egy mondat bizonyítható-e, pusztán a mondat grammatikai szerkezetén múlik. Jegyezzük meg azonban, hogy *Pr* definíciója nem nyújt olyan kritériumot (legalábbis közvetlenül nem), amelynek alapján tetszőleges mondatról eldönthetnénk, hogy bizonyítható-e. Annyit viszont elég könnyű belátni (bár itt nem részletezzük), hogy *Pr* elemei „felsorolhatók", azaz egyetlen végtelen sorozatba rendezhetők. Ezzel szemben *Ver*

definíciója nem tisztán grammatikai jellegű; ez világosan látható má abból, hogy „*Ixy*" a V értékelés szerint akkor igaz, ha $V(x) \subseteq V(y$ azaz ha az az osztály, amelyre az x változó utal (a V értékelés szerint része annak az osztálynak, amelyre az y változó utal (a V értékelés sze rint). Ez a definíció sem nyújt (legalábbis közvetlenül nem) eldöntési el járást az igaz mondatok felismerésére, sőt még a *Ver* osztály elemeine sorozatbarendezhetőségére sem. Általánosan – tehát a később tárgya landó formalizált elméletekre nézve is – igaz, hogy *Pr* része (többnyir valódi része) *Ver*-nek, *Pr* elemei felsorolhatók, de *Ver* elemeire a fel sorolhatóság többnyire nincs biztosítva.

Az apró betűs szövegben – a 28. tétel után – Tarski megjegyz hogy az osztálykalkulus esetén *Ver*-re tisztán strukturális definíció i adható (sőt azt is állítja, hogy kritérium is létezik az igaz mondatok fel ismeréséhez). A 28. tételből az is látható, hogy az osztálykalkulus axió máinak halmaza kibővíthető (végtelen sok axióma fölvételével) úgy hogy a bizonyítható mondatok osztálya egybeessék az igaz mondatol osztályával ($Pr = Ver$). De ez csak igen „gyönge" formalizált elméletel esetén fordulhat elő. Tarski hangsúlyozza, hogy az osztálykalkulusr vonatkozó eme eredményekhez vezető módszerekben nincs semm olyan általános vonás, amely átvihető lenne tetszőleges elméletekre.

A *Ver* osztály eredeti definíciója szerint az, hogy egy tárgynyelvi mon dat igaz-e, a metaelmélettől függ, azaz attól, hogy „$\alpha \in Ver$" bizonyít ható-e a metaelméletben. Ha a metanyelv bizonyítható mondatait iga állítások kifejezőinek tekintjük, akkor az előző mondatunk alapjái úgy tűnik, hogy a Tarski-féle igazságdefiníció a tárgynyelvi mondatol igazságának problémáját egyszerűen áttolja a metanyelv analóg prob lémakörébe. Ez az észrevétel vezet a következő megjegyzésünk témájá hoz.

(*C*) *Szemantikai fogalom-e a Tarski-féle igazságfogalom?* Vizsgáljul meg a metaelméleti bizonyíthatóság fogalmát! Mint Tarski a 2. §-bar kifejti, a metanyelv axiómái két csoportra oszthatók: általános logika axiómák és a tárgynyelv morfológiájára vonatkozó axiómák (a 2.{ 1 – 5. axiómái). Az axiómák első csoportját nem sorolja föl, ám példa ként utal a *Principia Mathematica* axiómarendszerére. A 3. §-ban hasz nált fogalmak és tételek alapján világosabb képet alkothatunk a fel használt axiómákról (lásd ehhez az *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *g*) jegyzeteket) a metaelmélet fölhasználja ugyanazt a logikát, mint a tárgyelméle (azaz a klasszikus elsőrendű logikát), továbbá a *halmazelmélet* bizonyos tételeit, amelyek Tarski érvelésében (a *Principia Mathematica* felfogásával összhangban) egy magasabb rendű (típuselméleti) logika tételeiként jelennek meg. Ha úgy vélekedünk, hogy ez a magasabb rendű logika már átlépést jelent a szűkebb értelemben vett logikától a halmazelmélet speciális szakterületére, akkor a metaelmélet tételei (bizonyítható mondatai) hármas alapzaton nyugszanak: (i) logika, (ii) halmazelmélet, (iii) a tárgynyelv „morfológiája" (grammatikája, szintaxisa, ezt írja le az axiómák 2. csoportja). Még jegyezzük meg, hogy a metaelméleti érvelések (bizonyítások) szabatos logikai „levezetések", és a tárgyalási univerzum (a 2. § 5. axiómája jóvoltából) egy végtelen osztály (ez békésen összefér a halmazelmélet posztulátumaival). Tekintettel arra, hogy a halmazelmélet — vagy legalábbis az itt felhasznált töredéke — általánosan elfogadott a matematika minden területén, továbbá hogy a „morfológiai" axiómák csupán azt szolgálják, hogy rögzítsék a tárgynyelvet, amellyel a metaelméletben foglalkozni óhajtunk, méltányosnak tűnik a következő megállapítás:

A metaelmélet tételei analitikus igazságok.

Analitikusak annyiban, hogy pusztán a logika, a halmazelmélet és szintaxis szerint igazak, azaz igazságukat végeredményben a bennük szereplő terminusok jelentése biztosítja. Az analiticitás fogalmának aligha lehet ennél világosabb nemtriviális példája.

Analitikusak a V konvencióban fellépő mondatok is, hiszen *Ver* definíciójának logikai következményei:

(V) $x \in Ver$ akkor és csak akkor, ha p,

ahol x egy tárgynyelvi mondat megnevezése, p pedig e mondat metanyelvi fordítása. Ha még „$x \in Ver$" is bizonyítható a metaelméletben (x rögzített értéke mellett), akkor ez is analitikus igazság — s ezzel elhárítottuk azt a gyanút, hogy Tarski apparátusa az igazság problémáját egyszerűen áttolja a tárgynyelvből a metanyelvbe. (A 4. tétel szerint *Ver* ellentmondástalan és teljes deduktív rendszer; így a tárgynyelv tetszőleges x mondata esetén „$x \in Ver$" és „$x \notin Ver$" egyike és csak egyike bizonyítható a metanyelvben.) — Természetesen elképzelhető olyan deduktív diszciplína is (pl. az elméleti fizika valamely matematizált részterülete), melynek axiómái nem halmazelméleti igazságok; ekkor a metaelmélet tételei csak egy tágabb értelemben tekinthetők „analitikus" igazságoknak (ti. ha a szakmai axiómákat a bennük szereplő terminusok *jelentése* alapján minősítjük igazaknak).

Viszont egy nem kevésbé komoly problémába ütköztünk: hogyan lehetséges az, hogy a V típusú mondatok analitikusaknak bizonyultak? E kérdés indokoltságához hasznos lesz egy illusztráció a természetes nyelvek területéről.

Legyen a tárgynyelv az angol nyelv egy pontosan regulázott töredéke, a metanyelv pedig a magyarnak egy ugyancsak regulázott töredéke, amelybe belefér pl. a következő állítás:

(1) ‚Snow is white' igaz akkor és csak akkor, ha a hó fehér.

Nyilvánvaló, hogy (1) nem analitikus állítás. Ha pl. ‚snow' jelentése az lenne, ami a magyar ‚fű' szóé, akkor (1) hamis lenne. Az (1) mondat nemtriviális szemantikai információt tartalmaz a tárgynyelvről. Viszont a Tarski-féle megközelítésben a (V) szerkezetű mondatok nem tartalmazhatnak ilyen információt, hiszen analitikusan igazak, egy definíció következményei.

Kérdésünk így is fogalmazható: Valóban *szemantikai* definíció-e Tarski igazságdefiníciója? Úgy tűnhet, erre határozott NEM a válasz, hiszen Tarski maga hangsúlyozza, hogy a szemantikai terminusokat (így a kielégítés és az igaz mondat fogalmát) *nemszemantikai* terminusokkal definiálja, ámde — legalábbis „előítéleteink" szerint — egy nyelv szemantikája nem lehet visszavezethető a szintaxisára, akár még halmazelméleti fogalmak felhasználása révén sem. Ezt a kritikai észrevételt lényegesen enyhíti, hogy a definiált szemantikai terminusok a tárgynyelvre vonatkoznak, ámde *nem a tárgynyelv, hanem a metanyelv* szintaktikai eszközeivel definiáltak.

Zavarunkat tovább fokozza, ha tekintetbe vesszük, hogy általában Tarskit tekintik a modern logikai szemantika — speciálisan a modellelméleti szemantika — úttörőjének, és éppen a jelen tanulmánya alapján. A modellelméleti szemantika valamely (formalizált) nyelv szemantikájának leírására vállalkozik (többnyire a nyelv valamely interpretációjára relativizáltan), beleértve az igazság (igaz mondat) fogalmának elemzését is, ámde ennek során az igazság preteoretikus, nem formalizált fogalmára támaszkodik. Az előző két bekezdés alapján úgy tűnik, hogy Tarski munkájában ilyesmiről egyáltalán nincs szó. Ha azt kérdezzük: A *Ver* osztály *valóban* az interpretált osztálykalkulus igaz mondatainak osztálya? – akkor az igenlő válasz indokolása Tarski munkája alapján triviális: „x igaz mondat" *definíció szerint* azt jelenti, hogy $x \in$ *Ver*. Pedig – úgy gondolhatnánk – ha az igazság szemantikus felfogásáról volna szó, akkor az igenlő válasz mélyebb megalapozást igényelne.

Ilyen és hasonló megfontolások alapján pl. Hilary Putnam a következő megállapításra jut: „Az igazságról szóló filozófiai számadásként tekintve, Tarski elmélete annyira sikertelen, hogy ennél sikertelenebb számadás már nem is lehetséges." [PUTNAM 1985, 64.; idézi ETCHEMENDY 1986, 2.]

Némileg enyhébben ítéli meg Tarski vállalkozását John Etchemendy. Szerinte Putnam megállapítása eltúlzott reagálás egy egyébként helyes észrevételre: „Tarski definíciója nem nyújt elemzést az igazság egy fontos koncepciójához. Ha föltennénk, hogy ez volt a célja, továbbá hogy ez az egyetlen filozófiailag érdekes téma, akkor jogosan következtetnénk arra, hogy kudarcot vallott, és definíciójának csupán technikai jelentősége lehet. De nyilvánvaló, hogy mindkét föltevés hibás." [ETCHEMENDY 1986, 14., 8. jegyzet.]

Etchemendy még két adalékot említ annak alátámasztására, hogy Tarski programja nem azonos az igazság szemantikai elemzésének programjával. Az egyik megállapítása az, hogy Tarski – szükség esetén – elfogadhatónak tartja az igazságelmélet axiomatikus fölépítését is, amelyben az „igaz mondat' definiálatlan, csak axiómákkal körülhatárolt jelentésű terminus. (Erről az 5. §-ban lesz szó.) A másik: Ha egy nyelvben a mondatok osztálya véges, Tarski elfogadja a *Ver* osztály „felsorolásos" definícióját is (lásd e szakaszban a 115. oldalon). Ha végtelen konjunkciót is megengedne, akkor a kielégítés rekurzív definíciójára egyáltalán nem lenne szüksége. Mármost világos, hogy sem az axiomatikus igazságelmélet, sem a „felsorolásos" igazságdefiníció nem tartalmaz elemzést. Ezzel szemben a rekurzív igazságdefiníció azt a látszatot keltheti, mintha a tárgynyelvi kifejezések szemantikai tulajdonságait, ill. relációit elemezné, az olyan rekurzív kikötések révén, mint pl.

(2) „*Np*" akkor és csak akkor igaz, ha *p* nem igaz,

hiszen ez „úgy néz ki", mintha azt rögzítené, hogy az ‚*N*' funktor a negáció kifejezője a tárgynyelvben. De ez csak látszat – így Etchemendy –, hiszen a Tarski-féle megközelítésben a V típusú állítások szükségszerű igazságok.

Etchemendy így foglalja össze kritikáját:

> „Tarski nem művelt formális szemantikát, nem adott elemzést az igazság szemantikai fogalmához, ahogyan azt e diszciplínában felfogják. Tarski célja egy olyan predikátum bevezetése volt, amely elkerüli az igazságpredikátumok köznyelvi inkonzisztenciáit, ám lehetővé teszi fontos állítások kifejezését, amelyekben e preteoretikus fogalmak döntő szerepet játszanak. A legtöbb célra egy Tarski-féle igazságpredikátum valóban lehetővé tesz ilyen kifejezéseket, miközben ügyesen elkerüli a szemantikai paradoxon kísértetét. Világos, hogy Tarski meglepő sikerrel vitte keresztül e programot." [ETCHEMENDY 1986, 19.]

Úgy tűnik, Etchemendy konklúziója is némileg eltúlzott reagálás egy valós tényre. Emeljük ki mindenekelőtt, hogy Tarski munkájában – majd a következő szakaszokban is látni fogjuk – *domináló* a *Ver* osztály *rekurzióval* való definiálása, és e módszere letagadhatatlanul jelen van a mai modellelméleti szemantikában. Igaza van Etchemendynek abban, amikor konceptuális különbséget lát a rekurzió valamely konkrét kikötésének – mint pl. a (2) alatti – Tarski-féle szerepe és valódi szemantikai szerepe között. A Tarski-féle megközelítésben a (2) kikötés egy definíció része lehet, és mint ilyen, nem mond semmit az ‚*N*' funktor szemantikai szerepéről. A tényleges szemantikai elemzésben viszont (2) egy *követelmény* (ahogyan Etchemendy mondja), amely előírja, hogy ‚*N*'-et a negáció jelének kell tekinteni. Mint állítás, (2) lehetne hamis is, pl. ha a tárgynyelvben ‚*N*' ténylegesen nem a negáció, hanem a szükségszerűség kifejezésére szolgálna. Etchemendynek igaza van addig, hogy a *Ver* osztály definíciója nem tartalmazza a tárgynyelv szemantikai elemzését; hiszen egy definíció formális okokból nem tartalmazhat semmiféle „elemzést". De a kép csak akkor lesz teljes, ha hozzáfűzzük: Tarski definíciója a tárgynyelv szemantikai elemzésének eredményére épül, minden egyes rekurzív kirovását egy-egy szemantikai „követelmény" indokolja.

Tarski hangsúlyozza, hogy a vizsgált tárgynyelvet *interpretált* nyelvnek kell tekintenünk, melynek jól formált kifejezései, nyitott és zárt mondatai világos jelentéssel bírnak. Ha ez így van, akkor rendelkezünk bizonyos „preteoretikus" szemantikai ismeretekkel az osztálykalkulus nyelvéről, és van értelme annak a kérdésnek, hogy a *Ver* osztály az osztálykalkulus *igaz* mondatainak az összessége-e az igazság e preteoretikus értelmében.

Az interpretált osztálykalkulus nyelvére vonatkozó szemantikai ismereteink a következők: (i) A változók megengedett értékei egy (végtelen) osztály részosztályai. (ii) Az inklúzió jele (*I*) az osztályok közötti *része* relációt fejezi ki; „*Ixy*" azt jelenti, hogy az *x* jelölte osztály része az *y* jelölte osztálynak. (iii) ‚*N*' a negáció, ‚*A*' az alternáció (megengedő értelmű ‚vagy') jele. (iv) ‚$\prod$' az univerzális kvantor jele; „$\prod x$" azt jelenti, hogy *bármely x osztályra*. – A tárgynyelv eme szemantikai jellemzése megtalálható a 2. §-ban.

Teljesen világos, hogy a 22. és a 23. def. az iménti szemantikai elemzésre épül. Az elemzés eredményei a rekurzív definíció egyes kirovásaiban jelennek meg, természetesen itt már nem „követelményekként", hanem definíciós előírásokként. A (V) szerkezetű mondatok azért válnak analitikus igazságokká, mert a *Ver* osztály definíciója magában foglalja azokat a szemantikai szabályokat, amelyek igazságukhoz szükségesek. És ezért lesz nemtriviálisan igaz az, hogy *Ver* az osztálykalkulus igaz mondatainak osztálya.

E megállapítások fényében nem látszik megalapozottnak az az állítás, hogy Tarski valami egészen mást csinált, mint amit a mai ún. formális (modellelméleti) szemantika művel. Az igazság (ill. a kielégítés-reláció) rekurzív definíciója a tárgynyelv szemantikai elemzésére épül. Ezért, és csakis ezért válhatott Tarski módszere a mai modellelméleti szemantika megalapozó forrásává.

(*D*) *A metanyelv gazdagabb, mint a tárgynyelv.* Vizsgáljuk meg, mi az alapvető jellemzője a metanyelv „gazdagabb" voltának.

Tudjuk, hogy a metanyelvben kifejezhető mindaz, ami a tárgynyelvben; ezenfelül a metanyelvben megnevezhetjük a tárgynyelv bármely kifejezését is. Ez utóbbi ténynek azonban nincs túlságosan nagy jelentősége. Az 5. §-ban (és az Utószóban) látni fogjuk, hogy bizonyos „erős" tárgynyelvek esetén a kifejezések metanyelvi megnevezései „lefordíthatók" a tárgynyelvre, azaz hogy a tárgynyelv tartalmazhatja a metanyelv egy részének fordítását. (Ekkor a tárgynyelv egyes kifejezései „kettős értelműek": egyik értelmüket a tárgynyelv eredeti interpretációja adja, másik értelmük pedig abból ered, hogy bizonyos metanyelvi kifejezések fordításainak tekinthetők.) Ebből látható, hogy nem a

tárgynyelvi kifejezések megnevezhetősége teszi lényegesen gazdagabbá a metanyelvet.

A tárgynyelvi változók (az osztálykalkulus esetében) osztályokra utalnak, a tárgynyelvi kvantifikáció tartománya az osztályok univerzuma (egy bizonyos végtelen osztály összes részosztályainak osztálya). A metanyelvben viszont – mint a 22. def. figyelmes tanulmányozásával meggyőződhetünk róla – pl. osztályok végtelen *sorozatai* fölött is kvantifikálunk (erre utal az *f* változó). Éppen ez a kritériuma annak, hogy a metanyelv gazdagabb, mint a tárgynyelv: *a metanyelvben szerepelnek olyan kvantifikálható változók is, amelyek „magasabb rendűek" a tárgynyelvi változók mindegyikénél.* A „magasabb rendű" jelző példánkban (az osztálykalkulus esetén) elég világos jelentésű; általánosabb meghatározására a 4. §-ban kerül sor.

E ténynek a tanulmány hátralévő részében nagy jelentősége lesz; ezért hívjuk fel rá már most az olvasó figyelmét.

4. §. AZ IGAZ MONDAT FOGALMA VÉGES RENDŰ NYELVEKBEN

Az a szerkesztési módszer, amelyet az előző szakaszokban az osztálykalkulus nyelvének vizsgálatára fölhasználtam, lényeges változtatások nélkül alkalmazható számos más formalizált nyelvre, még lényegesen bonyolultabb szerkezetűekre is. A következő eszmefuttatások kiemelik e módszer általánosságát, meghatározzák alkalmazásának határait, és vázolják azokat a módosításokat, amelyek e módszer konkrét alkalmazásának különböző eseteiben szükségesek.

E vizsgálatokban semmiképp sem áll szándékomban minden olyan nyelvet figyelembe venni, amely egyáltalán elgondolható, vagy amelyet valaki valamikor megszerkeszthetne; egy ilyen kísérlet eleve sikertelenségre lenne kárhoztatva. Természetesen kizárólag olyan szerkezetű nyelveket