X.

MELYEK A LOGIKAI FOGALMAK?*

E cikk eredete egy előadás, amelyet Tarski 1966. május 16-án ezzel a címmel tartott a Bedford College-ban a londoni egyetemen. Magnófelvétel készült, amelynek leírt változatát Tarski gépelt kézirattá fejlesztette. E szöveg alapján tartott vitaindító előadást 1973. április 20-án a logika természetével foglalkozó konferencián (Conference on the Nature of Logic), amelyet a buffalói State University of New York különböző egységei támogattak. Erről az előadásról gondos jegyzeteket, majd ezekből egy kibővített beszámolót készítettem, amelyet az egyetemi újság *(The Reporter)* 1973. április 26-án közölt. Az újságcikket elküldtem Tarskinak és másoknak is. Tarskinak szándékában állt a szöveg finomítása és publikálása, mintegy az *Igazság és bizonyítás* (1969) párjaként. A következő néhány évben számos alkalmam volt Tarskival beszélni és ismételten kifejezni érdeklődésemet az előadás nyomtatásbani megjelentetése iránt. 1978-ban kezdtem dolgozni a *Logic, semantics, metamathematics* című Tarski-kötet második kiadásának munkálatain; a kötet végül 1983 decemberében, röviddel Tarski halála után jelent meg. A kiadás érdekében Tarskival együtt végzett munkám

* Az eredeti cikk címe: *What are logical notions?* Forrása: *History and Philosophy of Logic* 7 (1986), 143–154. Fordította: *Bimbó Katalin.*

során ő számos alkalommal említette, hogy szeretné, ha kiadásra előkészíteném a *Melyek a logikai fogalmak?*-at, azonban 1982-ig semmi nem történt, amikor is átadta nekem a gépiratot azzal a meghagyással, hogy finomítani kell.

A cikk gondozása nagyobbrészt a szokásos szerkesztői tevékenységekből állt, mint a mondatszerkezet, a nyelvtan és a központozás javítása. Bizonyos helyeken a szöveget nyilvánvalóan nem logikus írta át. Néha előfordultak kisebb botlások (pl. a terminológia egységességében). Az irodalomjegyzéket és a jegyzeteket én csatoltam. Az egyetlen explicit irodalmi utalás a kéziratban a harmadik részben, Lindenbaum és Tarski 1936-os cikkének említése volt. Persze a legnagyobb gondot Tarski eszméinek teljes megőrzésére fordítottam.

A cikk fő gondolatának további tárgyalását és alkalmazását lásd Tarski & Givant 1988, 3. fejezet, 3.5. szakasz.

John Corcoran
State University of New York at Buffalo
1986. augusztus

1. Előadásom címe egy kérdés, olyan típusú kérdés, amely meglehetősen divatos mostanában. Egy másik, gyakran hallható kérdéstípus: Mi a pszichológia, mi a fizika, mi a történettudomány? Az ilyen típusú kérdéseket néha az adott tudományban dolgozó szakemberek, néha tudományfilozófusok válaszolják meg; időnként kikérik a logikus véleményét is, mint állítólagos szaktekintélyét ilyen dolgokban. Nos, azt kell mondanom, hogy az adott tudományban dolgozó szakemberek rendszerint a legkevésbé képesítettek arra, hogy jó definíciót adjanak tudományukra. Olyan téma ez, amelyben értelmes fejtegetést rendes körülmények között egy tudományfilozófustól várnánk el. És nyilván nem szaktekintély a logikus sem — nincs speciális képesítése ilyen típusú kérdések megválaszolására. Szerepe és hatása inkább negatív jellegű: kritikát gyakorol, rámutat arra, hogy valamely megfogalmazás mennyire bizonytalan, hogy mennyire határozatlan képet ad valamely tudományról. Mivel a logikus negatívan közelít más tudományok definíciójának tárgyalásához, természetesen különösen óvatosnak kell lennie, amikor saját tudományáról értekezik, és megkísérli megmondani, hogy mi a logika.

A „Mi a logika?" vagy a „Mi ez és ez a tudomány?" kérdésre igen különféle válaszok adhatók. Egyes esetekben beszámolhatunk a tudomány nevének általánosan elterjedt használatáról. Így arról szólva, hogy mi a pszichológia, megkísérelhetjük számba venni, hogy a legtöbb ember, aki ezt a kifejezést használja, normálisan mit ért „pszichológián". Más esetekben nem óhajtunk tekintettel lenni a kifejezést használók összessége körében uralkodó szóhasználatra, hanem csak azokéra, akik képesítettek ezt használni, akik szakértők ezen a területen. Itt az érdekelne bennünket, hogy a pszichológusok mit értenek a „pszichológia" kifejezésen. Megint más esetekben válaszunk normatív jellegű: indítványozzuk, hogy a kifejezést bizonyos módon használják, függetlenül az aktuális használati módtól. Akadnak aztán olyan válaszok is, amelyekről nehezen tudnám megmondani, hogy mire irányulnak. A fogalom valódi, igazi jelentésének megragadásáról beszélnek, valamiről, ami független az aktuális használattól és bármilyen normatív javaslattól, a fogalom mögötti platóni ideához hasonló valamiről. Ez utóbbi megközelítés olyan idegen és különös számomra, hogy egyszerűen mellőzni fogom, mivel semmi értelmeset nem tudok mondani róla.

Hadd mondjam meg elöljáróban, hogy a „Melyek a logikai fogalmak?" kérdésre válaszolva nem teszek egyebet, mint indítványozni, javasolni fogom a ‚logikai fogalom' terminus egy lehetséges használatát. Úgy tűnik, hogy javaslatom megegyezik a ‚logikai fogalom' terminusnak – ha nem is az összes elterjedt használatával, de legalábbis – azzal a használatával, amellyel a jelenlegi gyakorlatban találkozunk. Úgy gondolom, hogy e terminust számos különböző értelemben használják, és javaslatom ezek egyikéről ad számot. Továbbá nem fogom tárgyalni azt az általános kérdést, hogy „Mi a logika?". A logikát tudománynak, igaz mondatok olyan rendszerének veszem, amelyben a mondatok bizonyos fogalmakra – logikai fogalmakra – utaló kifejezéseket tartalmaznak. Itt a problémának csak egy aspektusával foglalkozom, a logikai fogalmak problémájával, de nem foglalkozom pl. a logikai igazságok problémájával.

2. A javaslatom alapjául szolgáló gondolat Felix Kleintől, a híres német matematikustól származik. A 19. század második felében Felix Klein igen komoly munkát végzett a geometria megalapozásában, amely nagy hatást gyakorolt e területen a későbbi kutatásokra.[1] Az őt foglalkoztató problémák egyike azon fogalmak megkülönböztetése volt, amelyeket a geometria különféle rendszereiben, a különféle geometriai elméletekben (pl. a szokásos euklideszi geometriában, az affin geometriában, a topológiában) használnak. Megkísérlem módszerét a geometrián túl kiterjeszteni és alkalmazni a logikára is. Gyanítom, hogy ugyanez a gondolat kiterjeszthető más tudományágakra is. Tudomásom szerint eddig még senki nem próbálta ezt megtenni, pedig talán Klein gondolatának felhasználásával megfogalmazható egy

[1] Lásd pl. Klein 1872.

ésszerű javaslat a biológiai, a fizikai és a kémiai fogalmak megkülönböztetésére is.

Hadd kíséreljem meg most nagyon röviden kifejteni Klein gondolatát. Ez a ‚transzformáció' szakkifejezésre alapozódik, amely speciális esete a ‚függvény' terminusnak, amelyet mindnyájan jól ismerünk a középiskolai matematikából. Mint mindannyian tudjuk, a függvény vagy függvényreláció olyan bináris (kétargumentumú) r reláció, mely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy bármely x objektumhoz legföljebb egy olyan y objektum létezik, amellyel x az r relációban áll. Azokat az x-eket, melyekhez ténylegesen van ilyen y, ‚argumentumértékeknek' nevezzük, a megfelelő y-okat pedig ‚függvényértékeknek'. Így is írjuk: $y = r(x)$; ez a szokásos függvényjelölés. Az összes argumentumértékek halmazát ‚a függvény értelmezési tartományának' hívjuk, a függvényértékek halmazát a *Principia Mathematicá*ban ‚ellentartománynak', gyakrabban ‚a függvény értékkészletének' mondják. Tehát minden függvénynek van értelmezési tartománya és értékkészlete. A matematikában gyakran van dolgunk olyan függvényekkel, amelyeknek az értelmezési tartománya is, az értékkészlete is számokból áll. Vannak azonban más típusú függvények is. Pl. tekinthetünk olyan függvényeket, amelyek értelmezési tartománya is, értékkészlete is pontokból áll. A geometriában többek között olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyeknek mind értelmezési tartománya, mind értékkészlete megegyezik a teljes geometriai térrel. Az ilyen függvényeket a tér önmagába való *transzformációiként* emlegetjük. Továbbá gyakran foglalkozunk olyan függvényekkel, amelyek egy-egy értelmű leképezések: ezek olyan tulajdonságú függvények, hogy bármely két különböző argumentumértékhez a megfelelő függvényértékek is mindig különbözőek. Azt mondjuk, hogy egy ilyen függvény egy-egy értelmű megfeleltetést létesít az értelmezési tartománya és az értékkészlete között. Így egy függvényt, melynek értelmezési tartománya is, értékkészlete is megegyezik a teljes térrel és amely egy-egy értelmű, *a tér önmagába való egy-egy értelmű transzformációjának* (rövidebben *transzformációnak*) mondunk. Most a szokásos geometriai tér transzformációit fogom tárgyalni.

Tekintsük most a normális euklideszi geometriát, amelyet megint csak mindannyian ismerünk a középiskolából. Ez a geometria eredetileg empirikus tudomány volt, melynek célja a bennünket körülvevő világ tanulmányozása. Ez a világ különböző fizikai objektumokkal, többek között merev testekkel van benépesítve. A merev testek jellemző tulajdonsága, hogy mozgás közben nem változik az alakjuk. Egy ilyen merev test minden mozgása megfelel egy bizonyos transzformációnak, mivel a merev test a mozgás kezdetén elfoglal egy helyet, a helyváltoztatás eredményeként pedig egy másik helyet. Minden pontnak, melyet a merev test a mozgás megkezdésekor elfoglal, megfelel egy pont, melyet ugyanaz a test a mozgás végén foglal el. Tehát függvénykapcsolattal van dolgunk. Igaz, hogy ez nem olyan függvénykapcsolat, melynek értelmezési tartománya a tér összes pontját tartalmazza, de a geometriából ismeretes, hogy mindig kiterjeszthető az egész térre. Nos, erre a transzformációra az jellemző, hogy nem változtatja meg a két pont közötti távolságot. Ha x és y bizonyos távolságra vannak egymástól, és ha $f(x)$ és $f(y)$ az x-nek és y-nak megfelelő végpontok, akkor az $f(x)$ és $f(y)$ közötti távolság ugyanaz, mint az x és y közötti. Azt mondjuk, hogy a távolság *invariáns* e transzformációra nézve. Ez a merev testek helyváltoztatásának jellemző tulajdonsága – ha nem teljesülne, nem neveznénk a testet merev testnek.

Mint látják, természetszerűleg jutottunk a geometriában arra, hogy a tér transzformációjának egy speciális fajtáját tekintsük, azokat a transzformációkat, melyek a pontok közötti távolságot nem változtatják meg. A matematikusoknak megvan az a rossz szokásuk, hogy más területről kölcsönöznek terminusokat – a fizikából, az asztrológiából –, és rokon, de eltérő jelentést tulajdonítanak nekik. Ezt tették a ‚mozgás' terminussal is. A ‚mozgás' terminust matematikai értelemben használják, amikor is ez egyszerűen olyan transzformációt jelent, amelyben a távolság nem változik. Így egy konkrét fizikai objektum, egy merev test mozgása egy bizonyos transzformációt eredményez; de a matematikusnak a mozgások egyszerűen távolságtartó transzformációk. Az ilyen transzformációkat helyesebben ‚izometrikus transzformációknak' nevezik.

Nos, Klein rámutat, hogy az euklideszi geometriában tárgyalt összes fogalom invariáns a mozgásokra, azaz minden izometrikus transzformációra nézve. Hadd ismételjem meg, mit értünk azon, hogy egy fogalom invariáns bizonyos transzformációkra nézve. A ‚fogalom' kifejezést meglehetősen laza és általános értelemben használom, hozzávetőleg arra, hogy valamely típushierarchia – mint pl. a *Principia Mathematica*-beli – összes lehetséges típusainak objektumaira utaljak. Így a fogalmak magukba foglalják az individuumokat (jelen kontextusban a pontokat), az individuumok osztályait, az individuumok közötti relációkat, az individuumok osztályainak osztályait stb. Mit jelent pl. az, hogy az individuumok valamely osztálya invariáns egy f transzformációra nézve? Azt jelenti, hogy x akkor és csak akkor eleme ennek az osztálynak, ha eleme $f(x)$ is; más szóval, hogy ez az osztály a transzformációval önmagába jut vissza. Mit jelent az, hogy egy reláció invariáns egy f transzformációra nézve? Azt jelenti, hogy x és y akkor és csak akkor állnak egymással ezen relációban, amikor $f(x)$ és $f(y)$. Az invariancia fogalmát, hasonló módon, könnyen kiterjeszthetjük az osztályok osztályaira, az osztályok közötti relációkra stb.

Nos, az euklideszi geometria alapos vizsgálata azt mutatja, hogy a benne tárgyalt összes fogalom nemcsak a mozgásokra, az izometrikus transzformációkra nézve invariáns, hanem a transzformációk ama szélesebb osztályára nézve is, amelyet a geométerek *hasonlósági transzformációknak* neveznek. Ezen transzformációk némelyike nem távolságtartó, de mindegyikük „egyformán növeli vagy csökkenti a geometriai alakzatok méretét minden irányban". Pontosabban, némely hasonlósági transzformáció nem távolságtartó, de mindegyikük megőrzi két távolság arányát. Példának okáért, ha van három pontunk, x, y, z, és ha y távolsága z-től 25%-kal nagyobb, mint x távolsága y-tól, akkor a hasonlósági transzformáció eredménye megint csak három pont: $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$, ahol az $f(y)$ távolsága $f(z)$-től 25%-kal nagyobb, mint $f(x)$ távolsága $f(y)$-tól. Más szóval, egy háromszöget egy hozzá hasonló háromszöggé transzformálunk, melynek ugyanakkorák a szögei, és amelynek oldalai arányosan nagyobbak vagy kisebbek. És kiderül, hogy az euklideszi geometriában tárgyalt összes tulajdonság invariáns az összes hasonlósági transzformációra nézve. Ez mellesleg azt jelenti, hogy az euklideszi geometriában a hosszegység fogalma nem tárgyalható. Nem kérdezhetjük meg az euklideszi geométertől, hogy diszciplínája szempontjából a metrikus vagy a nemmetrikus rendszer előnyösebb-e. Euklideszi terminusokban nem különböztethető meg a yardtól a méter, sőt a centiméter sem. Bármely két szakasz „ugyanaz", minthogy hasonlósági transzformáció segítségével mindig leképezhetők egymásba. Valamely szakasz minden euklideszi tulajdonsága minden más szakasznak is tulajdonsága.

Nos, Klein azt mondja, hogy a metrikus geometriában – ez a szokásos euklideszi geometria egy más elnevezése[2] – tanulmányozott fogalmak jellemző tulajdonsága az invariancia az összes hasonlósági transzformációra nézve. Ezt kimondhatjuk mint definíciót: egy *metrikus* fogalom vagy a metrikus geometria egy fogalma egyszerűen olyan fogalom, amely az összes lehetséges hasonlósági transzformációra nézve invariáns. Persze elképzelhető egy olyan diszciplína, amelyben a transzformációknak csak egy szűkebb osztálya érdekel bennünket, pl. csak az izometrikus transzformációké, vagy csak az olyan transzformációké, melyek megőrzik a jobbra lenni és balra lenni közötti különbséget

[2] A terminológia ezen a téren nem egységes, és Tarski szóhasználata néhány olvasónak ismeretlen lehet. Az itteni terminológia Tarski 1935b-ből származik, ahol a ‚deskriptív geometria' a szokásos euklideszi geometriának arra a részére utal, amely csak a ‚pont' és a ‚közte van' terminusokra épül (ezeket Tarski ‚deskriptív primitíveknek' mondja). A ‚metrikus geometria' kifejezést a teljes euklideszi geometriára érti (amely – mint Tarski megjegyzi – alapozható pusztán a ‚pont' és a ‚kongruencia' fogalmakra – ezeket Tarski ‚metrikus primitíveknek' nevezi). Ugyanazon cikkben Tarski jelzi, hogy a deskriptív geometria a metrikus geometria valódi része abban az értelemben, hogy a ‚közte van' definiálható a ‚pont' és a ‚kongruencia' fogalmával, míg a ‚kongruencia' nem definiálható a ‚pont' és a ‚közte van' fogalmával.

(a normál geometriánkban nem tudunk ilyen megkülönböztetést tenni), vagy az óramutató járásával megegyező és ellenkező irányú forgások közötti különbséget (ez is olyan megkülönböztetés, amelyet a normál euklideszi geometriában nem tudunk megtenni). Viszont a megengedett transzformációk osztályának szűkítésével több megkülönböztetést tudunk tenni, azaz bővítjük a megengedett transzformációkra nézve invariáns fogalmak osztályát. Ebben az irányban a geometriában szélsőséges eset lenne négy pont kiválasztása,[a] elnevezése, és csak azoknak a transzformációknak a tekintetbevétele, amelyek e négy pontot változatlanul hagyják. Ez egy koordináta-rendszer bevezetését jelentené, és ezzel a geometria területének peremén találnánk magunkat, amit analízisnek neveznek. Tulajdonképpen ebben az esetben egyetlen megengedett transzformáció lenne, a „triviális" azonossági transzformáció.

Másrészt, mehetünk az ellenkező irányba is. A megengedett transzformációk osztályának szűkítése és ezzel az invariáns fogalmak osztályának bővítése helyett az ellenkezőjét is tehetjük, azaz bővíthetjük a transzformációk osztályát. Beszámíthatjuk pl. azokat a transzformációkat is, amelyekben a távolság változhat, de megőrződik a pontok kölcsönös lineáris helyzete. Pontosabban, ha három pont egy egyenesen van, akkor a transzformáció utáni képeik is egy egyenesen vannak, és ha egy pont két másik között van, akkor a képe is a másik kettő képe között van. Az ilyen transzformációkat ‚affin transzformációknak' hívják. Az *egy egyenesen lenni* (kollinearitás) és a *közte lenni* éppen két olyan fogalom,

[a] Négy olyan pontra gondoljunk, amelyek nem esnek egy síkba. Ekkor a négy pont egy háromdimenziós koordináta-rendszert határoz meg.

amely az összes ilyen transzformációra nézve invariáns. A geometriának azt a részét, amelyben ilyen fogalmakat használnak, affin geometriának hívják.[3] Ebben a geometriában pl. nem tudunk megkülönböztetni egy szakaszt egy másiktól, és a háromszögek között sem tudunk különbséget tenni. Bármely két háromszög úgyszólván egyenlő, azaz az affin geometria szemszögéből megkülönböztethetetlen. Ez azt jelenti, hogy az affin geometriában nem tudunk egyetlen olyan tulajdonságot sem említeni, amellyel a háromszögek egyike rendelkezik, de az összes többi nem. A metrikus geometriában sok ilyen tulajdonságot ismerünk, pl. az egyenlő oldalú vagy a derékszögű tulajdonságot. Az affin geometriában ilyen megkülönböztetéseket nem tudunk tenni. De meg tudunk különböztetni egy háromszöget egy négyszögtől, nem lévén olyan affin transzformáció, amely háromszögből indul ki és négyszögre vezet. Ily módon a transzformációk egy tágabb osztályára van példánk, és ennek folytán a fogalmaknak egy szűkebb osztálya invariáns a transzformációk ezen bővebb osztályára nézve; kevesebb fogalmunk van, de ezek „általánosabb" jellegűek.

Még egy lépéssel tovább mehetünk. Pl. számításba vehetjük azokat a transzformációkat, amelyek még a *közte lenni* relációt sem őrzik meg, és azokat a transzformációkat, amelyek az egyazon egyenesen lévő pontokat különböző

[3] Az ‚affin geometria' az elterjedt szóhasználatban is pontosan ezt jelenti. Amit Tarski itt ‚affin geometriának' nevez, azt 1935b-ben deskriptív geometriának nevezte. Egy affin, de nem hasonlósági transzformáció a síkgeometriában úgy kapható, hogy egy síkot párhuzamos sugarakkal vetítünk egy őt nem merőlegesen metsző síkra. Konkrétan egy megfelelő helyzetű egyenlő szárú derékszögű háromszög képe egyenlőtlen oldalú, de a háromszögek összes képe háromszög.

egyeneseken fekvőkké transzformálják. Az a jellegzetesség, ami még itt is megőrződik, szemléletesen szólva, az összefüggőség vagy zártság. Összefüggő alakzat összefüggő marad, zárt görbe zárt marad. Néha azt mondják, mintegy „negatív" formában, hogy ezek azok a transzformációk, amelyek nem „szakítanak szét", nem „tépnek föl". Ez ugyan egyáltalán nem pontos megfogalmazás, de néhányan már bizonyára sejtik, mire gondoltam: az ún. folytonos transzformációkra. A geometriának az a része, az a geometriai diszciplína, amely az ilyen transzformációkra nézve invariáns fogalmakkal foglalkozik, a topológia. A metrikus geometriában egy háromszöget meg tudunk különböztetni egy másiktól; az affin geometriában ezt nem tudjuk megtenni, de még mindig meg tudunk különböztetni egy háromszöget és – mondjuk – egy négyszöget. A topológiában azonban nem tudunk különbséget tenni két sokszög között, sőt még egy sokszög és egy kör között sem, mivel ha egy adott sokszöget huzalból készítettnek képzelünk el, mindig újra hajlítgathatjuk úgy, hogy kört vagy valamilyen más sokszöget kapjunk. Egy ilyen transzformáció folytonos lesz: ami összefüggő, azt nem választjuk szét. A topológiában is meg tudunk különböztetni pl. egy háromszöget kettőtől. Egy háromszög alakú huzalt két háromszöggé csak úgy lehet áthajtogatni, ha kettészakítjuk, és mindkét darabból egy-egy háromszöget formálunk – de ez nem lenne folytonos transzformáció.

3. Most tegyük föl, hogy folytatjuk ezt a gondolatsort, és a transzformációk még bővebb osztályát tekintjük. Szélsőséges esetként tekinthetnénk a tér vagy a tárgyalási univerzum, vagy a „világ" *összes* egy-egy értelmű önmagába való transzformációinak osztályát. Melyik lesz az a tudomány, amely a transzformációk legbővebb osztályára nézve invariáns fogalmakkal foglalkozik? Itt nagyon kevés fogalmunk lesz, és valamennyi igen általános jellegű. Azt javaslom, hogy ezek legyenek a logikai fogalmak, azaz, hogy egy fogalmat akkor mondjunk ‚logikainak', ha invariáns a világ önmagába való összes lehetséges egy-egy értelmű transzformációjára nézve.[4] Ez a javaslat talán furcsán hangzik; az egyetlen mód, hogy ésszerűségét belássuk: kifejteni néhány következményét, megnézni, mire vezet, mit kell elfogadnunk, ha egyetértünk a ‚logikai' terminus ilyen értelmű használatával.

Természetszerű kérdés: tekintsük azokat a fogalmakat, amelyekre a létező logikai rendszerek valamelyikében – pl. a *Principia Mathematicá*ban – definiált terminusok utalnak. Logikai fogalmak-e a most javasolt értelemben a *Principia Mathematicá*ban definiált fogalmak? A válasz: igen; ez egy meglehetősen egyszerű metalogikai eredmény, amelyet jóval ezelőtt (1936-ban), Lindenbaummal közösen írt rövid cikkünkben fogalmaztunk meg. Bár ez az eredmény egyszerű, úgy gondolom, hogy a legtöbb logikai tankönyv-

[4] MAUTNER 1946-tól eltekintve – amit Tarski bizonyára nem ismert –, úgy hiszem, ez az első kísérlet angol nyelven a Klein-féle Erlangeni Programnak a logikára való alkalmazására. SILVA 1945-ben azonban, ami olaszul jelent meg, olyan alkalmazásokat találunk, amelyek megelőlegezik a későbbi modellelmélet lényeges elemeit. KEYSER 1922 (219) és WEYL 1949 (73) utalnak – többé-kevésbé bizonytalan terminusokban – a logika és az Erlangeni Program közötti lehetséges kapcsolatokra. Tarski cikkei 1923 és 1938 között (TARSKI 1983-ban összegyűjtve) nem említik Felix Kleint. Az Erlangeni Program hatásának története a logika fejlődésére még megírásra vár. Kutatásra szorul az Erlangeni Program szerepe a fizikában is, különösen a relativitáselméletben.

ben szerepelnie kellene, mert jellemző tulajdonságát mutatja meg annak, ami logikai eszközökkel kifejezhető. Nem szándékozom az eredményt pontosan megfogalmazni, a lényege azonban éppen az, amit mondtam. A *Principia Mathematicá*-ban – és egyébként bármely más ismert logikai rendszerben – definiált valamennyi fogalom invariáns az összes egy-egy értelmű, a „világot" vagy a „tárgyalási univerzumot" önmagába átvivő transzformációra nézve.[5]

Ezután szisztematikus módon keresünk példákat logikai fogalmakra, kezdve a legegyszerűbb szemantikai kategóriákkal vagy típusokkal, az összetettebbek felé haladva. Pl. kiindulhatunk az individuumokból, a legalacsonyabb típus objektumaiból, és megkérdezzük: Milyen példák vannak logikai fogalmakra az individuumok között? Másképp: Van-e példa individuumokra, amelyek logikaiak lennének a fenti értelemben? És a válasz egyszerű: Nincs ilyen példa. Ebben a típusban nincsenek logikai fogalmak, egyszerűen azért, mert mindig tudunk találni a világnak olyan önmagába való transzformációját, amely során egy individuum egy tőle különbözőbe transzformálódik. Az az egyszerű

[5] Tarski buffalói előadásában jelezte, hogy a jelen megjegyzések a szűkebb értelemben vett ‚fogalmakra', a halmazokra, halmazok osztályaira stb. vonatkoznak; de a *Principia Mathematica*-beli igazságfüggvények, kvantorok, relációoperátorok stb. értelmezhetőek szűkebb értelemben vett fogalmakként, és így értelmezve őket, a jelen megjegyzések ugyanúgy vonatkoznak rájuk is. Pl. értelmezzük a két igazságértéket mint a tárgyalási univerzumot (az igazság) és az üres halmazt (a hamisság); ez nyomban lehetővé teszi az igazságfüggvények (magasabb rendű) fogalmakként való értelmezését. Az ilyen fajtájú értelmezések ismerősek és természetesek a matematikusok számára, azonban olyasféle filozófiai kérdéseket involválnak, amilyeneket a kortárs logikafilozófusok vizsgálnak.

tény, hogy mindig definiálhatunk ilyen függvényt, azt jelenti, hogy ezen a szinten nincsenek logikai fogalmak.

Továbbmenve a következő szintre, az individuumok osztályaihoz, megkérdezzük: Az individuumok mely osztályai logikaiak ebben az értelemben? Kiderül, megint csak egyszerű meggondolás eredményeképpen, hogy az individuumoknak pontosan két osztálya logikai: az univerzális osztály és az üres osztály. Csakis ez a két osztály invariáns az univerzum valamennyi önmagába való leképezésére nézve.

Ha még tovább megyünk, és a bináris (kétargumentumú) relációkat tekintjük, egy egyszerű érvelés azt mutatja, hogy ebben az értelemben mindössze négy bináris reláció minősül logikainak: az univerzális reláció, mely bármely két objektum között mindig fönnáll, az üres reláció, amely soha nem áll fenn, az azonossági reláció, amely csak akkor áll fenn „két" objektum között, ha azok azonosak, és az ellenkezője, a különbözőségi reláció. Így csak az univerzális reláció, az üres reláció, az azonosság és a különbözőség azok, melyek az individuumok közötti bináris relációk közül logikaiak. Ez érdekes, mivel Peirce, Schröder és más 19. századi logikusok éppen ezt a négy relációt vezették be és vizsgálták a relációk elméletében. Ha a ternáris relációkat, kvaternáris relációkat stb. tekintjük, a helyzet hasonló: mindegyik esetben kevés, véges számú logikai relációt kapunk.

A helyzet kissé érdekesebbé válik, ha a következő szintre lépünk, és az osztályok osztályait vesszük. „Osztályok osztályai" helyett „osztályok tulajdonságait" mondhatunk, és megkérdezhetjük: Az osztályok mely tulajdonságai logikaiak? A válasz újból egyszerű, még ha egészen nehéz is pontosan megfogalmazni. Kiderül, hogy (az individuumok) osztályainak tulajdonságai közül csak azok logikaiak, amelyek az osztályok elemeinek számára vonatkoznak. Hogy egy osztály háromelemű vagy négyelemű..., hogy véges vagy végtelen – ezek logikai fogalmak, és lényegében az egyedüli logikai fogalmak ezen a szinten.

Ez az eredmény számomra meglehetősen érdekesnek tűnik, mivel a 19. században viták folytak arról, hogy logikánk az extenziók logikája-e vagy az intenzióké. Sokszor elmondták, főként a matematikai logikusok, hogy logikánk valójában az extenziók logikája. Ez azt jelenti, hogy logikailag nem lehet megkülönböztetni két fogalmat, ha azonos az extenziójuk (terjedelmük), még ha intenzióik különbözőek is. Ahogy szokásosan mondják: nem tudjuk logikailag megkülönböztetni a tulajdonságokat az osztályoktól. Most javaslatunk fényében kiderül, hogy logikánk még az extenziók logikájánál is kevesebb: csupán a számok, a numerikus relációk logikája. Nem tudunk logikailag megkülönböztetni két osztályt egymástól, ha mindegyikük pontosan két individuumot tartalmaz, mivel ha van két osztályunk, melyek mindegyike két individuumból áll, akkor mindig tudunk találni olyan transzformációt az univerzumon, amely az osztályok egyikét a másikba viszi át. Ha egy kételemű osztály rendelkezik valamely logikai tulajdonsággal, az összes kételemű osztály is rendelkezik vele.

Ha összetettebb fogalmakhoz fordulunk, pl. osztályok közötti relációkhoz, akkor a logikai fogalmak változatossága nő. Itt először is sok fontos és érdekes logikai relációra bukkanunk, melyek jól ismertek azok előtt, akik tanulmányozták a logika elemeit. Olyan dolgokra gondolok, mint az osztályok közötti *része* reláció, két osztály diszjunktsága, két osztály átfedése, és sok más; mindezek példák a normál értelemben logikai relációkra, és logikaiak javaslatom értelmében is. Ez ad bizonyos elképzelést arról, hogy melyek a logikai fogalmak. A négy legegyszerűbb típusra korlátozódtam, és a logikai fogalmak tárgyalt példáit is ezekből a típusokból vettem. A fejtegetés befejezéseképpen szeretnék egy olyan kérdéssel foglalkozni, amely már valószínűleg néhányuknak eszébe ötlött megjegyzéseimet hallgatván.

4. Gyakran felvetik a kérdést, vajon a matematika a logika része-e. Itt a problémának csak egy aspektusa érdekel bennünket, az, hogy a matematikai fogalmak logikaiak-e, de az pl. nem, hogy a matematikai igazságok logikaiak-e, ami kívül esik témakörünkön. Mivel ma már közismert, hogy a matematika egésze rekonstruálható a halmazelméletben,[6] az osztályok elméletében, a probléma a következőre egyszerűsödik: A halmazelméleti fogalmak logikai fogalmak-e, avagy nem? Mivel ismeretes, hogy az összes szokásos halmazelméleti fogalom definiálható egynek,[7] a beletartozás

[6] Tarski a ‚halmazelmélet' kifejezést itt meghatározatlan és általános értelemben használja, mely szerint számos különböző konkrét elmélet halmazelméletnek minősíthető. Többek között a Whitehead–Russell-féle típuselmélet és az (elsőrendű) Zermelo–Fraenkel-elmélet is halmazelméletnek minősül. Itt meg kell jegyezni, hogy a ‚halmazelméletek' ismert változatait Tarski csupán kis kóstolónak tekintette ahhoz képest, ami hasznosan kifejleszthető lenne e területen.

[7] E megjegyzés előföltétele az a megállapodás, hogy adott fogalmat akkor mondunk definiálhatónak egy rögzített fogalom segítségével, ha (az adott fogalomnak) van olyan definíciója, melyben kizárólag a következő fogalmak szerepelhetnek: (i) az említett rögzített fogalom, (ii) a tárgyalási univerzum, (iii) egyéb, már elismerten logikai fogalmak. Nyilvánvaló pl., hogy az üres halmaz nem definiálható úgy, hogy az *eleme* reláción kívül abszolúte semmit se használjunk. Azt is meg kell

fogalmának, azaz az *eleme* relációnak a segítségével, kérdésünk végső formája: az *eleme* reláció logikai-e javaslatom értelmében? A válasz kiábrándítónak tűnik. Ugyanis a halmazelméletet, az *eleme* reláció elméletét fölépíthetjük úgy is, hogy a válasz igenlő legyen e kérdésre, de eljárhatunk úgy is, hogy tagadó választ kapjunk.

Így a válasz: „Ahogy tetszik!" Mindannyian tudják, hogy az antinómiák, alapvetően a Russell-antinómia eredményeképpen – amely a századfordulón tűnt föl a halmazelméletben – a halmazelmélet megalapozását mélyreható vizsgálatnak kellett alávetni. A vizsgálatnak – amely semmi esetre sem befejezett a jelen pillanatban – egyik eredménye az lett, hogy kifejlesztettek két módszert annak felépítésére, ami megmenthető a halmazelméletből az elszenvedett romboló csapás után. Az egyik módszer lényegében a *Principia Mathematica* módszere, a Whitehead–Russell-féle módszer, a típusok módszere. A másik módszer olyan kutatóktól származik, mint Zermelo, von Neumann és Bernays, ez az elsőrendű módszer. Nézzük meg most kérdésünket ezen két módszer szempontjából.[8]

A *Principia Mathematica* módszerét használva a halmazelmélet egyszerűen a logika része. A módszer nagyjából a

---

jegyezni, hogy Tarski ‚az összes *szokásos* halmazelméleti fogalomról' beszél, s nem ‚az összes halmazelméleti fogalomról'; az utóbbiak sokasága nem megszámlálható, viszont csak megszámlálható sok definíció lehetséges.

[8] Tarski szerint az első módszer alapja egy magasabb rendű logika, a másodiké pedig egy elsőrendű logika. Persze, a típuselméletet rekonstruálni lehet egy többszortú elsőrendű logika alapján is, ez azonban nem volna összeférhető az előadás szellemével és betűjével. Hasonlóképpen, a Zermelo-féle halmazelmélet kifejthető egy magasabb rendű

következőképpen írható le: Van egy kiinduló tárgyalási univerzumunk, az individuumok univerzuma, és aztán ebből az individuumuniverzumból építünk föl bizonyos fogalmakat, osztályokat, relációkat, osztályok osztályait, relációk osztályait stb. Azonban csak a kiinduló univerzum, az individuumok univerzuma alapvető. Transzformációkat az individuumok univerzumán definiálnak, és egy ilyen transzformáció indukálja az individuumok osztályaira, individuumok közötti relációkra stb.[b] vonatkozó transzformációkat. Pontosabban, tekintsük a legalsó típus univerzális osztályát és egy transzformációt, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete ez az univerzális osztály. Ez a transzformáció indukál egy olyan transzformációt is, melynek az értelmezési tartománya és értékkészlete a második típus univerzális osztálya, az individuumok osztályainak osztálya. Amikor a ‚világ' önmagába való transzformációiról beszélünk, csakis a kiinduló tárgyalási univerzum transzformációira gondolunk, az individuumuniverzuméra (melyet a fizikai objektumok univerzumaként interpretálhatunk, bár a *Principia Mathematicá*ban semmi sincs, ami egy ilyen interpretá-

---

logikában is. De ez sem fér össze az előadás szellemével – azon történeti tény dacára, hogy Zermelo maga is így tehetett. Mellékesen, a két módszert megalapozó történelmi jelentőségű cikkek ugyanazon évben, 1908-ban jelentek meg.

[b] Ha f egy transzformáció az individuumok U osztályán, akkor pl. U részosztályaira f-et a következő definícióval terjeszthetjük ki: Ha $A \subseteq U$, legyen

$$f(A) = \{y\colon \exists x[x \in A \mathbin{\&} y = f(x)]\}.$$

Ha pedig R egy kéttagú reláció U elemei között, akkor legyen

$$f(R) = \{\langle u, v\rangle\colon \exists x \exists y[f(x) = u \mathbin{\&} f(y) = v \mathbin{\&} \langle x, y\rangle \in R]\}.$$

ció elfogadására kényszerítene bennünket). Ezt a módszert használva világos, hogy az *eleme* reláció biztosan logikai fogalom. Előfordul különböző típusokban, minthogy az individuumok az individuumok osztályainak elemei, az individuumok osztályai pedig elemei az individuumok osztályai osztályainak stb. És az indukált transzformáció definíciója alapján ez a reláció invariáns a világ valamennyi önmagába való transzformációjára nézve.

Másrészt, tekintsük a halmazelmélet felépítésének második módját, ahol nincs típuselmélet, csupán egy tárgyalási univerzum van, és a tárgyalási univerzum individuumai közötti *eleme* reláció definiálatlan, primitív fogalom. Világos, hogy ez az *eleme* reláció nem logikai fogalom, hiszen, mint korábban említettem, az individuumok között csak négy logikai reláció van: az univerzális reláció, az üres reláció, az azonossági és a különbözőségi relációk. Ezen relációk egyike sem lehet az *eleme* reláció, ha az individuumokat és halmazokat ugyanabba a tárgyalási univerzumba tartozóknak tekintjük. Tehát a második koncepció szerint a matematikai fogalmak nem logikaiak.

Ez a következtetés érdekesnek tűnik, mivel a két lehetséges válasz két különböző gondolkodási módnak felel meg. A logika, a halmazelmélet és a matematika monista koncepciója, amelyben a matematika egésze a logika része lenne, úgy gondolom, rokonszenves a modern filozófusok egy alapvető irányzatának. Viszont a matematikusok csalódottan hallanák, hogy a matematika, melyet ők a legmagasztosabb diszciplínának tekintenek a világon, valami olyannyira triviálisnak a része, mint a logika; ezért a halmazelmélet olyan felépítését kedvelik, amelyben a halmazelméleti fogalmak nem logikaiak. Az én javaslatomból, önmagában véve, semmiféle válasz nem következik arra a kérdésre, hogy a matematikai fogalmak logikaiak-e.

SZERKESZTŐI KOMMENTÁR

Az 5. jegyzet szerint a két igazságérték reprezentálható az üres, ill. az univerzális osztállyal, s ez biztosítja invarianciájukat a transzformációk során. Akár e megfontolás alapján, akár ettől függetlenül, posztulálhatjuk az igazságértékek invarianciáját. Ennek következménye lesz az összes igazságfüggvény invarianciája, vagyis az, hogy az igazságfüggvények – szemléletünkkel egyezően – a logikai fogalmak közé tartoznak. Ugyancsak logikai fogalomnak minősül az univerzális kvantifikáció is (amely olyan függvényként fogható föl, amely az U univerzális osztályhoz az ‚igaz', U minden valódi részéhez pedig a ‚hamis' értéket rendeli). Általánosan: az extenzionális logikában szokásosan logikainak tekintett fogalmak – a logikai konstansok szemantikai értékei – Tarski meghatározása szerint is logikainak minősülnek.

Hogyan lehetne átvinni Tarski gondolatmenetét az intenzionális logika területére? Az intenzionális logika szemantikájában a tárgyalási univerzum (U) mellett föllép még a lehetséges világok W osztálya. Kézenfekvő, hogy a szemantikában W-re hivatkozó fogalmak közül azokat minősítsük logikainak, amelyek a W osztály minden transzformációja mellett invariánsak. Ennek folyománya pl. az, hogy a modális logikában a szükségszerűség csak akkor számít logikai fogalomnak, ha egy állítás szükségszerűségén azt értjük, hogy az állítás *minden* lehetséges világban igaz. Így a C. I. Lewis-féle **S5** modális rendszerben a szükségszerűség (és a lehetőség) logikai fogalom, de a gyöngébb rendszerekben, amelyekben egy állítás adott világbeli szükségszerűségéhez elég annyi, hogy az állítás az adott világ alternatíváiban legyen igaz (pl. **T**, **S4**), a szükségszerűség nem tiszta logikai fogalom.

ALFRED TARSKI

Logikusok és diákok négy nemzedéke úgy ismerte meg Alfred Tarskit, mint rendkívül széles látókörű és mély gondolkodású tudóst. Hatása a logikai, matematikai és tudományfilozófiai alapkutatások fejlődésére nem csupán saját vizsgálatainak és írásai sokaságának tudható be, hanem azon hatásnak is, amelyet az elmúlt fél évszázad során a nemzetközi tudományos közösségben tanítóként és fáradhatatlan szervezőként fejtett ki.

E szavakkal méltatja Alfred Tarskit a hetvenedik születésnapja alkalmából rendezett szimpózium tanulmánykötetének előszava. A szavakat még lehetne szaporítani, de beszéljenek inkább a tudományos pályafutásához kapcsolódó adatok.

Alfred Tarski 1902. január 14-én született Varsóban. Érettségije után a varsói egyetemen kezdte meg tanulmányait. Eleinte matematikát és biológiát tanult, később behatóan foglalkozott még filozófiával és nyelvészettel is.

Tarski fejlődésének, érdeklődési körének és tudományos pályafutásának ismertetéséhez feltétlenül szólnunk kell, legalább röviden, a varsói egyetem tudományos légköréről, amelyben Tarski hallgatóként, majd – 1939-ig – oktatóként részt vett. Az első világháború után létrejött független Lengyelországban – a lengyel tudósok korábbi működésének folytatásaként – számos egyetemi tudományos központ alakult ki. Ezek közül kiemelkedik a varsói egyetem azzal, hogy itt létrejön a filozófusok, logikusok és matematikusok gyümölcsöző együttműködése.

A varsói egyetem akkori kiváló matematikusai voltak Wacław Sierpiński és Kazimierz Kuratowski. Kutatási témáik – egyebek között halmazelmélet, matematikai logika, topológia – kimutathatóan befolyásolták Tarskit is témaválasztásában, aki élete végéig foglalkozott halmazelmélettel és matematikai logikával. Stefan Banach, aki Lwówban tanított, ugyancsak hatással volt Tarskira. E hatásokat közös publikációk is jelzik. Ugyancsak közös publikációk tanúsítják együttműködését (a nála három évvel fiatalabb) kortársával, Adolf Lindenbaummal.

A varsói egyetem vezető filozófusai a húszas években Tadeusz Kotarbiński, Stanisław Leśniewski és Jan Łukasiewicz voltak. Kotarbiński metodológiával, ismeretelmélettel és nyelvfilozófiával foglalkozott. Materialisztikus tendenciájú filozófiai rendszere *reizmus* néven vált ismertté. Tarski munkái alapján nehéz bármit is mondani arról, hogy milyen hatással volt rá ez a filozófiai elmélet. Ám abban biztosan jelentős szerepe volt Kotarbińskinak, hogy Tarski olyan matematikussá lett, aki alapos filozófiai képzésben részesült, s aki mindig élénk érdeklődést tanúsított a matematika és a logika filozófiai és metodológiai problémái iránt.

Annál világosabban kimutatható Leśniewski és Łukasiewicz hatása Tarskira. Leśniewski a logika és a matematika megalapozásának új, a nyugat-európai iskoláktól (Russell, Hilbert, Brouwer) radikálisan eltérő típusú kidolgozásán munkálkodott. Sem ő, sem Łukasiewicz nem voltak „hivatásos" matematikusok – bár természetesen ismerték annyira a matematikát, amennyire az kutatási témájukhoz szükséges volt. Leśniewski figyelt föl szemináriumán az ifjú Tarski rendkívüli képességeire, és ő tanácsolta neki, hogy főleg matematikával foglalkozzék. Tarski matematikai virtuozitásából azután Leśniewski is, Łukasiewicz is sokat profitált: saját rendszereikben fölhasználták Tarski eredményeit. Ám Tarski nem lett „Leśniewski-hívő" abban az értelemben, hogy harcosan és egyértelműen elkötelezte volna magát tanára metodológiai eszméi mellett. Ehelyett inkább azt mondhatjuk, hogy Hilbert metamatematikai iskolájához csatlakozott, olyan új színekkel gazdagítva azt, amelyekben világosan látható Leśniewski néhány eszméjének hatása. A legfontosabb e tekintetben a szemantikai kategóriák Leśniewski-féle elmélete, amelyet Tarski intenzíven alkalmaz a formalizált nyelvek szemantikájában. Ezt az elméletet Kazimierz Ajdukiewicz finomította, alkalmassá téve arra, hogy a Leśniewski rendszerétől eltérő nyelvekben is alkalmazható legyen. (Ajdukiewicz korábban néhány évig Hilbert mellett dolgozott Göttingenben. 1925 és 1928 között a varsói egyetem filozófiaprofesszora volt, ezt követően pedig a lwówi egyetemen tanított.) Tarski természetesen figyelembe vette Ajdukiewicz módosításait is. – Hatással volt Tarskira Leśniewski „harcos antiformalizmusa" is, amely – egyebek között – megkövetelte, hogy a formalizált elméletek axiómái a szemlélet számára igazak – s ne pusztán megállapodással elfogadott föltevések – legyenek. Tarski ezt abban a kissé megszelídített formában akceptálja, hogy ez az előfeltétele annak, hogy a formalizált elméletben beszélhessünk az *igaz kijelentés* (vagy *igaz mondat*) fogalmáról. Legalább egy helyen Tarski egyetértését fejezi ki Leśniewski matematikafilozófiájával is, amelyet az „intuicionista formalizmus" terminussal aposztrofál.

A matematikai logika első propagátora lengyel nyelven a rendelkezésünkre álló adatok szerint Łukasiewicz volt. A húszas években figyelme főleg a többértékű és a modális logika felé fordult, ezek filozófiai interpretálását összekapcsolva a merev determinizmust bíráló filozófiai koncepciójával. Úgy vélte, hogy a logika kétértékűsége szigorúan kapcsolódik a merev determinizmushoz; következésképp a merev determinizmus elutasítása szükségszerűen együtt jár a logika többértékűségének elismerésével. (Érvelése természetesen támadható, s megmutatható, hogy a merev determinizmus elutasításával nem kell együtt járnia a kétértékű logika elvetésének.) Łukasiewicz 1920 és 1930 közötti logikai kutatásaiban intenzíven részt vett Tarski, és több más fiatal varsói matematikus is. Nincs nyoma annak, hogy ez jelentősen befolyásolta volna Tarski eszmevilágát. Úgy tűnik, a többértékű logika számára egy formalizált rendszer matematikai tulajdonságainak vizsgálatát jelentette, függetlenül a rendszer filozófiai interpretációjától.

Halmazelmélet, a matematika megalapozása és matematikai logika (különösen az elemi logika) – ez az a három téma, amely – tanárai közvetítésével – az első impulzusokat adta az ifjú Tarski tudományos pályafutásához. Első publikációja (amely egy lengyel folyóirat 1921. évi számában jelent meg) a jólrendezett halmazok axiomatikájához kapcsolódik. Második dolgozata, egyben doktori értekezése (ugyanazon folyóirat 1923. évi számában) az elemi logika témakörébe vág. Megmutatja, hogy a mondatváltozókra és mondatfüggvény-változókra alkalmazott kvantifikáció, valamint a bikondicionális művelete segítségével az elemi logika bármely művelete (negáció, konjunkció, kondicionális stb.) kifejezhető.

Ez a metalogikai eredmény rendkívül fontos volt Leśniewski számára. Háromrészes logikai elméletének első részében, az ún. *prototetikában* („az első elvek" elméletében) fontos szerepe van a mondatokra utaló változók, valamint a mondatokat mondatokba leképező függvényekre utaló változók univerzális kvantifikációjának. Leśniewski arra törekedett, hogy rendszerében a lehető legkevesebb primitív (definíció nélkül bevezetett) szimbólum szerepeljen (továbbá minél kevesebb axióma és bizonyítási szabály). Tarski eredménye lehetővé tette számára, hogy (a kvantifikálható változók használata mellett) mindössze két primitív jelre (‚$\forall$' és ‚$\equiv$', az univerzális kvantor és a bikondicionális jele) szorítkozzék. – De Tarski ezen eredményét a mai logika grammatikájában is fölhasználjuk: az extenzionális logika teljes (típuselméleti) rendszere fölépíthető két primitív logikai jel (a lambda-operátor és az extenzióazonosság jele) fölhasználásával.

Tarski 1924-ben doktorált Leśniewski vezetése alatt. Egy év múlva elnyerte a varsói egyetem magántanári képesítését, ami intézményes tanítási és kutatási keretet nyújtott számára 1939-ig. Ennél följebb aztán nem is jutott a varsói egyetem ranglétráján, noha néhány év múlva volt tanáraival egyenrangú vezető tudósnak számított: zsidó származása miatt nem kaphatott „nyilvános rendes" egyetemi tanári státust. Megélhetési gondjai arra kényszerítették, hogy középfokú tanintézetekben vállaljon oktatási munkát. Mint egy beszélgetés során elmondotta, ez a tevékenység elég sok idejét elrabolta a tudományos munkától.

Ha áttekintjük Tarski publikációinak listáját 1924 és 1930 között (lásd kötetünk végén), látjuk, hogy ekkori kutatási eredményei csaknem kizárólag a halmazelmélet körébe tartoznak. De ez nem a teljes kép. Az elemi logikába vágó metalogikai eredményei közül egyesek publikálatlanul maradtak, mások pedig a Łukasiewicz és Tarski közös publikációjaként 1930-ban megjelent „Untersuchungen über den Aussagenkalkül" című cikkben találhatók. (Ebben más varsói logikusok eredményei is szerepelnek.)

A húszas évek vége felé kezdődnek Tarski azon kutatásai, amelyeket a *metamatematika* címszó alá szoktak sorolni. E hilberti terminus helyett alighanem pontosabb lenne itt a *metalogika* kifejezés használata. A téma ugyanis a formalizált elméletek általános tulajdonságainak vizsgálata – bizonyítás, az ellentmondástalanság, a teljesség, az igazság, a definiálhatóság, a következményreláció stb. szempontjából –, és ezek a logika és a metodológia körébe tartozó problémák. Egy-két kivonatos tájékoztató e témákról már 1930 előtt megjelenik, a részletes tanulmányok azonban 1930 és 1936 között látnak napvilágot. Témájuk szerint ezeket két csoportba oszthatjuk.

Az első csoport tanulmányai a formalizált elméletek *szintaktikai* jellegű vizsgálatai körébe tartoznak: középpontjukban a formális bizonyíthatóság (levezethetőség) fogalma szerepel. Kötetünkben az I., II., IV., V. tanulmányok reprezentálják Tarski idevágó munkásságát. Az e cikkekben foglalt eredmények a hilberti bizonyításelméleti (metamatematikai) iskola tematikájához kapcsolódnak, és napjainkban is alapvető fontosságúaknak számítanak. Külön megemlítjük – mivel kötetünkben nem szerepel – Tarski *rendszerkalkulusát* (1936), amely a formalizált elméletek logikai algebrájaként is tekinthető, és egyben fontos előmunkálat a modern tudományelmélet logikai eszközeinek és terminológiájának megteremtéséhez.

A tanulmányok második csoportjába soroljuk a formalizált elméletek *szemantikájának* megalapozását célzó cikkeket (kötetünkben a III., VI., VII. tanulmányok). E téma ennyire rendszeres és átfogó tanulmányozása előzmény nélküli: Tarski itt a maga vágta ösvényen halad. Középpontban áll *Az igazság fogalma a formalizált nyelvekben* című tanulmány (kötetünkben a III.), amely lengyelül 1933-ban, németül pedig 1935-ben jelent meg (s azóta számos más nyelvre is lefordították). E terjedelmes munkában Tarski megmutatja, hogy az *igaz mondat* fogalmának tartalmilag helyes s ugyanakkor logikailag szabatos (paradoxonmentes) definíciója és használata a köznyelvben reménytelen, a formalizált nyelvekben viszont lehetséges. E feladat megoldásához szükségünk van a kiinduló formalizált nyelv – a *tárgynyelv* – egy *metanyelvének* logikailag szabatos leírására, ebben kell – rekurzív definícióval – leírni az ún. kielégítési relációt, s ennek fölhasználásával megfogalmaznunk az igaz mondat definícióját. Tarski részletesen megvizsgálja, hogy a formalizált nyelvek mely típusaiban alkalmazható ez az eljárás. Megmutatja, hogy a matematika számára érdekes formalizált elméletekben a *bizonyítható mondat* fogalmának terjedelme szűkebb, mint az *igaz mondat* fogalmáé. Ez az eredmény mintegy pozitív komplementere volt Kurt Gödel egy híres, 1931-ben publikált negatív eredményének, amely szerint bizonyos matematikai elméletek gyógyíthatatlanul inkomplettek: vannak eldönthetetlen (se nem bizonyítható, se nem cáfolható) mondataik, s ezen a tényen axiómarendszerük konzisztens bővítésével sem lehet segíteni. Tarski eredményei szerint az ilyen elméletekben is használható az igaz mondat fogalma úgy, hogy magában foglalja a bizonyítható mondat fogalmát, de annál szélesebb; a Gödel-féle eldönthetetlen mondatok mindegyike egyértelműen vagy igaz, vagy nem igaz (hamis), bár nincs mechanikus eszközünk annak eldöntésére, hogy a két eset melyike áll fönn.

E cikk német változata egy igen fontos Utószót tartalmaz, amelyben Tarski megmutatja, hogy módszere miként terjeszthető ki olyan formalizált nyelvekre, amelyekben nem teljesül a szemantikai kategóriák (Leśniewski–Ajdukiewicz-féle) elméletének ún. alapelve. A szövegből kiderül, hogy Tarski elsősorban a halmazelmélet Zermelo–Fraenkel-típusú felépítésének nyelvére gondol, amely semmibe veszi a szemantikai kategóriák elméletét, ám ez a halmazelmélet a matematikusok körében a legnagyobb népszerűségnek örvendett. Ha a cikk tanúskodik Tarski metodológiai neveltetéséről, akkor az Utószó arról tanúskodik, hogy Tarski át tudott lépni e neveltetés korlátain, amikor a kutatás haladása ezt megkívánta.

Tarskinak az igazság definiálhatóságával kapcsolatos eredményei nem maradtak bezárva a „metamatematika" viszonylag szűk berkeibe. A varsói logikai iskola, s személyesen Tarski is, jó kapcsolatokat tartott fenn a Bécsi Körbe tömörült filozófusokkal. Tarski rendszeresen részt vett nemzetközi konferenciákon, és a harmincas években már Európa-szerte, sőt az óceánon túl is ismerték nevét és munkásságát. A neopozitivista filozófia (vagy antifilozófia) azonban nem volt „ideológiai" hatással a varsói logikai iskolára. A két iskola kutatási témái nagyrészt egybeestek, s innen a kölcsönös érdeklődés a „laboratóriumi eredmények" iránt, amely azonban mentes volt a filozófiai vonzalmaktól. Tarski néhány megjegyzéséből az tűnik ki, hogy ő egyben-másban respektálta a neopozitivista tudományfilozófiát. Ám egész életműve inkább arról tanúskodik, hogy egyetlen filozófiai áramlat sem gyakorolt rá maradandó hatást. Némileg is filozófikusnak mondható megállapításai mindig szorosan kötődnek az aktuálisan vizsgált logikai témához, s nem állnak össze valamiféle világképpé. Vitapartnerei rendszerint jóval mélyebb filozófiai hátteret képzelnek az ilyen megjegyzései mögé, mint amire Tarski egyáltalán gondolhatott.

Rátérve Tarski hatására, mindenekelőtt Rudolf Carnapot kell említenünk. Carnap kezdetben a tiszta szintaxisra esküszik a logikában és a tudománymetodológiában. Tarski eredményeinek hatására kénytelen elismerni, hogy a tudományos nyelv elemzésében a szemantikát, a jelentést is figyelembe kell venni, és kidolgozza szintaktikai ízű logikai kváziszemantikáját. – Jelentős személyes hatást gyakorolt Tarski Karl Popperre is; erről maga Popper számol be kötetünk XI. tanulmányában.

Ám Tarski szemantikai munkássága nemcsak pozitív hatást gyakorolt, hanem éles kritikát is váltott ki. Számos filozófus újra meg újra megkísérli megcáfolni vagy kijavítani Tarski nem létező „igazságelméletét" – nem létezőt, hiszen Tarski nem óhajtott válaszolni a „mi az igazság?" kérdésre, hanem csak azt óhajtotta megmutatni, hogy hogyan lehet a formalizált nyelvekbe bevezetni – a *bizonyít-*

ható mondat fogalma mellé – az *igaz mondat* fogalmát úgy, hogy az eleget tegyen a tartalmi helyesség és a logikai szabatosság pontosan megfogalmazott kritériumainak.

Az 1944-ben megjelent *Az igazság szemantikus felfogása és a szemantika megalapozása* című cikkében Tarski válaszol az addig fölbukkant kritikákra (kötetünkben a VIII. tanulmány). A későbbi ellenvetésekre részben Popper, részben B. Mates reagált (lásd kötetünk függelékében a XI. és a XII. tanulmányt). Néhány idevágó problémával szerkesztői kommentárok keretében is foglalkozunk majd.

1936-ban jelent meg (lengyelül) Tarski „logikai tankönyve": *Bevezetés a matematikai logikába és a deduktív tudományok metodológiájába.* 1971-ig 12 nyelvre fordították le a könyvet (több, módosított kiadásban is megjelent), amely hosszú időn keresztül a modern logika tanításának kézikönyveként funkcionált.

1939-ben befejeződik Tarski tudományos pályafutásának első, lengyelországi korszaka. A második világháború kitörésekor amerikai előadó körúton vesz részt. Az Egyesült Államokban marad; kezdetben a Harvard Egyetem, a New York-i Egyetem és a princetoni Institute for Advanced Study keretében működik, majd 1942-ben Berkeleyben, a California Egyetemen állapodik meg. 1946-ban itt kap végleges professzori kinevezést.

1958-ban Tarski vezetésével megalakul Berkeleyben a „Group in Logic and the Methodology of Science" elnevezésű kutatóközpont, logikusok, filozófusok és más tudósok részvételével. E világhírű központ kimagasló eredményekkel gazdagította a matematikát, a logikát és a tudománymetodológiát. Tarski számos tanítványából a szakma nemzetközileg elismert tudósa lett. Csak néhány kiemelkedő név azok közül, akik Tarski tanítványaiként szerezték meg a doktori (Ph. D.) fokozatot: J. B. Robinson (1948), R. L. Vaught (1954), R. M. Montague (1957), H. J. Keisler (1961), J. D. Monk (1961), H. Gaifman (1962), H. N. Gupta (1965).

A negyvenes évek végén Tarski kutatásainak középpontjába a modellelmélet kerül. De ez a megállapítás csupán a fő tendenciát jelöli meg. Tarski munkássága tematikailag rendkívül sokrétű. Amikor hetvenedik születésnapja tiszteletére tudományos szimpóziumot kívántak rendezni, a szervezők úgy döntöttek, hogy ezen a Tarski munkásságához csatlakozó témáknak kell szerepelniök. Ehhez a következő előzetes témajegyzéket állították össze:

Az algebrák általános elmélete.
Algebrai logika.
Modellelmélet.
A metamatematika alkalmazása az algebrában.
A geometria alapjai.
Eldöntési eljárások.
Eldönthetetlen elméletek.
Klasszikus halmazelmélet.
Alapozási kutatások a halmazelméletben.
A deduktív tudományok filozófiája és metodológiája.
Mértékelmélet.
Nemklasszikus logika.
Végtelen logika.
Definiálhatóság.

Ám kiderült, hogy ez a témajegyzék távolról sem teljes. Nem óhajtván egész hónapos szimpóziumot tartani, a szervezők a témák szelektálására kényszerültek.

Némi betekintést nyújt Tarski amerikai korszakának tematikájába fontosabb monográfiáinak jegyzéke is:

Cardinal Algebras, 1949.

Undecidable Theories (társszerzőkkel), 1953.

Ordinal Algebras, 1956.

Cylindric Algebras I. (társszerzőkkel), 1971.

Cylindric Set Algebras (társszerzőkkel), 1981.

Metamathematische Methoden in der Geometrie (társszerzőkkel), 1983.

És végül két posztumusz mű, társszerzőkkel:

Cylindric Algebras II., 1985.

A Formalization of Set Theory without Variables, 1988.

Bővebb tájékoztatást az Irodalomjegyzékben talál az érdeklődő olvasó.

1956-ban kiadták angolul Tarski fontosabb, 1923 és 1938 között publikált munkáit *Logic, Semantics, Metamathematics* címmel. (Ezek a cikkek eredetileg lengyel, francia vagy német nyelven jelentek meg.)

A tudományos ismeretterjesztés sem volt idegen Tarski számára. Említett tankönyvén kívül erről tanúskodnak előadásai és a szélesebb olvasótábor számára készült cikkei. Kötetünkben a VIII., IX., X. tanulmányok tartoznak ebbe a kategóriába. Egyszerű és világos okfejtései, megmegcsillanó iróniája, témája iránti lelkesedése követendő példaként szolgálhatnak.

Jelentős hatással volt Tarski más – nem matematikus – tudósokra is. Erről tanúskodnak az elméleti biológus J. H. Woodger elismerő szavai:

„. . .*első biológiai axiómarendszerem. . . publikálására készültem, amikor megtörtént a nagy esemény: első* *találkozásom Alfred Tarskival, Előadóként meghívtak egy párizsi nemzetközi kongresszusra, ahol röviden ismertettem új rendszeremet. Előadásom után Tarski tetszését és érdeklődését fejezte ki témám iránt. Felbátorodván, felkértem a* Principia Mathematica *felhasználásával készült első munkám elolvasására és bírálatára. Nagy örömömre beleegyezett, és ez lett a kezdete sokéves eredményes és örvendetes levelezésünknek — Alfred nem sajnálta a fáradságot —, az egymás hazájában tett látogatásaink idején folytatott elemző beszélgetéseinknek. ...Számos sétánk és beszélgetésünk során sokat tanultam a matematikai logikából és a halmazelméletből, ami a mai napig nagy segítségemre van.*"[1]

Tarski 1968-ban nyugalomba vonult, de még öt évig tartott tanfolyamokat Berkeleyben. A kutatómunkát pedig élete végéig folytatta. Néhány héttel halála előtt fejezte be — szerzőtársával együtt — utolsó munkáját, amelynek alapjául még a negyvenes években végzett publikálatlan kutatásai szolgáltak.

Életének 82. esztendejében, 1983. október 27-én hunyt el. Személyében századunk egyik legkiválóbb logikusa, matematikusa távozott az élők sorából.[2]

[1] W. H. Woodger, Thank you Alfred. In: Henkin et al. (eds.), 1974, 481–482.

[2] Az életrajzi adatok tekintetében főleg a következő munkákból merítettem: Franzke & Rautenberg 1972, Henkin et al. (eds.) 1974.

kesztői jegyzeteket pedig betűjelzés [*a), b), c), ...*] vezeti be. Némelyik cikkhez „szerkesztői kommentár" is csatlakozik. A szerkesztő reméli, hogy kiegészítő jegyzetei és kommentárjai segítik az olvasót a tanulmányok feldolgozásában.

Terminológia és jelöléstechnika. A szimbolikus logika szakmai terminológiája és jelöléstechnikája máig sem egységes. E kötetben túlnyomó részben az alábbi terminusokat és szimbólumokat használjuk:

negáció	konjunkció	alternáció (diszjunkció)	kondicionális (implikáció)
$\sim$	&	$\vee$	$\supset$

bikondicionális (ekvivalencia)	univerzális kvantor	egzisztenciális kvantor
$\equiv$	$\forall$	$\exists$

Tarski jelöléstechnikája ettől egyben-másban eltér, főleg abban, hogy zárójelek helyett a pontokkal és pontcsoportokkal való tagolást alkalmazza. Az olvasó kényelme érdekében e tekintetben eltérünk Tarski eredeti jelölésmódjától. Viszont megtartjuk, a szöveghűség érdekében, Tarski eredeti szakkifejezéseit, ill. a nekik megfelelő magyar vagy magyarosított terminusokat. A fenti táblázatban szereplő terminusok közül Tarski a zárójelekbe foglalt változatokat használja (ahol van ilyen változat). Helyenként a konjunkciót és az alternációt *logikai szorzásként*, ill. *logikai összeadásként* emlegeti.

A szabad változókat tartalmazó *nyitott* mondatok (nyitott formulák) megnevezésére Russell vezette be a *propositio-*