KALMÁR ÉRVE A CHURCH-TÉZIS ÉS A KIZÁRT HARMADIK ELVÉNEK PLAUZIBILITÁSA ELLEN

MOLNÁR ZOLTÁN GÁBOR

1. Bevezetés

Kalmár László *Az ún. megoldhatatlan matematikai problémákra vonatkozó kutatások alapjául szolgáló Church-féle hipotézisről*[1] c. magyar nyelvű cikkében elsősorban egy filozófiai álláspontot céloz meg és ez ellen sorakoztat fel érveket a matematika alapjaira vonatkozó tételek segítségével. A célba vett álláspont az *agnoszticizmus,* melynek konkrét mibenlétét eléggé homályban tartja, ám a cikk során kifejti, hogy ő milyen állásponton van, azaz mi az agnoszticizmus ellentéte. Kalmár szavaival élve ő olyan,

> [...] aki meg van arról győződve, hogy az objektív valóságban meglévő törvényszerűségek megismerhetőek[...] [Kalmár56, 34. o.]

Érdekes észrevenni, hogy az ugyanezt a témát feldolgozó *An Argument Against the Plausibility of Church's Thesis*[2] c. angol nyelvű cikkben az agnoszticizmus elleni érvelés nem szerepel, sokkal inkább a Church-tézis és az kizárt harmadik elve elleni érvként fogja fel munkáját. Abban a cikkben ez a két hipotézis egyenrangú és csak egyetlen helyen utal arra, hogy külön bajai vannak a megismerhetetlenséggel:

> However, I do not agree in considering the really fundamental discovery of Church as a discovery in the (absolute) limitations of the mathematizing power of Homo Sapiens.[Kalmár59, p. 73]

Itt szeretném azonban megjegyezni, hogy abban az időben a matematika filozófiáját komolyabban művelőket már nem az agnoszticizmus körüli kérdések foglalkoztatták. Volt ugyan idő, amikor Hilbert erősen kikelt az agnoszticizmus ellen, de annak az időszaknak megvolt a sajátos hangulata: azok a Gödel-tételek megszületése előtti és az intuicionista logika előretörése utáni évek voltak. Gödel eredményeit követően már Hilbert is látványosan hallgatott ezekről a nézeteiről, sőt a *Grundlagen der Mathematikban* megjelentette Gödel és Church tételeit és ezek bizonyítását. Az ötvenes-hatvanas években a vita inkább a realizmus-antirealizmus ellentéte körül zajlott. Egy ilyen probléma volt például, hogy miként értsük azt a sokszor hangoztatott kijelentést, hogy „a Gödel-mondat igaz, de nem bizonyítható". Van-e valamiféle objektív valóság, melyhez képest a Gödel-mondat igaz tud lenni, vagy ha nem, akkor legalább van-e olyan evidens következtetési módszer, amely szerint a Gödel-mondat igaz tud lenni. Kurt Gödel az 1951-es *Gibbs-előadásásban,*[3] és Michael Dummett 1963-as cikkében[4] körüljárta ezt a problémát és Kalmár László ebbe a diskurzusba valószínűleg szívesen bekapcsolódott volna, ha lett volna erre lehetősége. A magyar nyelvű cikkében Kalmár egyfelől megelőzte korát, amikor olyan filozófiai lehetőségeket talált,

Date: 2016.

[1] [Kalmár56]

[2] [Kalmár59]

[3] [Gödel51].

[4] [Dummett, p. 186.].

melyek Gödelnél és Dummettnél is felsejlenek, másfelől azonban láthatóan nem tudott elszakadni a dialektikus materializmus bűvköréből annyira, hogy értékelhető matematikafilozófiai eredményeket érjen el. Láthatóan olyan szalmabábokkal küzdött, amiket a kor Kelet-Európájának doktrinér tudományfilozófiája állított számára.

1.1. Az agnoszticizmus ellen, Gödel tételeivel. Mint ismeretes Gödel-tétele a Peano-aritmetikára (és rekurzív bővítéseire) vonatkozólag olyan T kijelentés létét állítja, mely nem levezethető és nem is cáfolható, feltéve a bizonyítás alapjául szolgáló axiómarendszer ellentmondásmentességét. Kalmár többször, szinte unásig hangsúlyozza, hogy egy ilyen (bizonyításelméleti értelemben) eldönthetetlen[5] állítás léte nem igazolja az agnoszticizmust, azaz, hogy soha nem tudjuk meg, hogy T igaz vagy sem. Szerinte ugyanis attól még, hogy a Peano-aritmetika alapján nem tudhatjuk, igaz-e T, még máshonnan rájöhetünk. Kalmár ugyanis olyan objektivista nézetet vall, miszerint az aritmetikára vonatkozó állítások a körülöttünk létező világ tárgyainak tulajdonságaiból absztrakcióival keletkeztek és ha az adott axiómarendszer elégtelen ennek a tulajdonságnak a kifejezésére, majd más axiómarendszer alkalmas lesz.

Kalmár szerint az axiómák szakadatlan bővítésére van szükség ahhoz, hogy a valódi aritmetikát leírjuk. Erre eljárást is javasol. Szerinte az axiómarendszer konzisztenciáját kimondó állítás evidens és tartalmas állítás, ezért ezt nyugodtan hozzávehetjük az axiómarendszerhez. És mivel köztudott, hogy a konzisztenciamondatból következik a Gödel-mondat, ez azonnal maga után vonja a Gödel-mondat levezethetőségét is az új axiómarendszerben:

> Azonban a GÖDEL-tétel bizonyítása az A axiómarendszer olyan A' bővítését adja meg, amely tartalmilag elfogadható, amennyiben az A axiómarendszer helyességében megbízunk; ugyanis A' egyetlen egy új axióma hozzávételével keletkezik A-ból és ez az új axióma azt mondja ki, hogy az eredeti A axiómarendszer ellentmondástalan. (Természetesen ehhez a bővített A' axiómarendszerhez a GÖDEL-tétel szerint ismét van olyan $T(A')$ ítélet, amely A'-ben nem bizonyítható be, sem pedig nem cáfolható meg; de viszont létezik olyan még bővebb A'' axiómarendszer is, amelyben ez a $T(A')$ ítélet is bizonyítható, és így tovább.) [Kalmár56, 23. o.]

Egyfelől tehát látjuk, hogy T nem abszolút eldönthetetlen probléma (ahogy az agnoszticisták gondolják), csak relatívan eldönthetetlen, hiszen egy evidens axiómával kibővítve levezethető az új axiómarendszerből. Másfelől ebben a környezetben nem fogunk találni abszolút eldönthetetlen problémát.

Abban Kalmárnak igaza van T nem abszolút eldönthetetlen. De abban nincs igaza, hogy a konzisztenciamondat vagy T evidens. Ugyanis $\neg T$ akkor nem levezethető, ha a Peano-aritmetika *ω-konzisztens.* A Peano-aritmetika egy A' bővítése akkor ω-konzisztens, ha minden $p(x)$ formulára teljesül, hogy

$$\text{ha } A' \vdash p(n) \text{ minden } n\text{-re, akkor } A' \nvdash (\exists x)(\neg p(x)).$$

[5]Gödel kétféleképpen használja az eldönthetőséget. Ha a Peano-aritmetika egy adott A' bővítésében valamely T formula az A'-ből levezethető vagy a tagadása vezethető le, akkor ezt *az A' alapján eldönthetőnek* nevezi. Ha pedig valamely $R(x_1,\dots,x_n)$ számelméleti relációhoz létezik olyan r formula, hogy ha $R(x_1,\dots,x_n)$ igaz, akkor $r(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})$ levezethető és ha $R(x_1,\dots,x_n)$ hamis, akkor $r(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})$ cáfolható, akkor az ilyen R-et *eldönthetőnek,* „entscheidungsdefinitnek” nevezi. A cikkében csak primitív rekurzív számelméleti relációkkal foglalkozik, melyekről megállapítja, hogy eldönthetők. [Gödel31, p. 609.]

Márpedig egyáltalán nem igaz, hogy a Peano-aritmetikára mindig úgy gondolunk, hogy az ω-konzisztens. Éppenséggel teljesen védhető álláspont, ha olyan aritmetikát akarunk magunknak, melyben vannak végtelen nagy számok, ahogy teljesen védhető álláspont az is ha végtelen nagy vagy végtelen kis valós számokról szeretnék beszélni, pl. a nemsztenderd matematikában. Márpedig ezekben a rendszerekben éppenhogy van olyan $p(x)$ predikátum, hogy

$$\text{minden } n\text{-re } A' \vdash p(n), \text{ de } A' \vdash (\exists x)(\neg p(x)).$$

A Gödel-tétel bizonyításában pedig éppen azzal tudjuk $\neg T$ levezethetetlenségét igazolni, hogy feltesszük, hogy az axiómarendszer ω-konzisztens.[6] Miközben egy nemsztenderd modellben éppen az ω-inkonzisztencia és $\neg T$ igazsága, ami evidens, azaz inkább gondoljuk, hogy $\neg T$-t kéne felvennünk új axiómának (bármit is jelentsen az, amúgy tökéletesen tartalmatlan $\neg T$ állítás).

1.2. Az abszolút eldönthetetlen probléma. A bizonyíthatóságról Kalmár áttér az eldönthetőségre, pontosabban az eljárással kiszámíthatóságra. Nem nyilvánvaló, hogy ezen mit ért, de az világos, hogy Kalmár valamely az objektív valóságban létező aritmetikára gondolt és ebben akarta véges lépéssel eldönteni, hogy valamely állítás igaz vagy hamis. (Akiknek ez sok, azok gondoljanak az ω-ra, ott sem nyilvánvaló, hogy ne létezhetne abszolút eldönthetetlen probléma.) Mindenesetre Kalmár bekorlátozza az abszolút eldönthetetlen probléma tulajdonságait, oly módon, hogy hasonlatos legyen a Gödel-tételbeli relatív eldönthetetlen mondat tulajdonságaihoz. Gödelnél T egy univerzális $(\forall y)p(y)$ alakú állítás, ahol $p(y)$ egy primitív rekurzív formula (egyváltozós primitív rekurzív számelméleti relációt reprezentáló, azaz eldönthető relációt reprezentáló formula). Gödel-tételének élesítése Kalmár szerint tehát a következő lenne. Egy abszolút eldönthetetlen aritmetikai probléma olyan

$$(\forall y)p(y)$$

alakú T állítás, amelyre az teljesül, hogy

(1) minden y természetes számra $p(y)$ eldönthető, de
(2) bizonyítható, hogy $(\forall y)p(y)$ (azaz T) nem eldönthető.

Kalmár gondolatmenete a következő. Ha valamely m-re $p(m)$ hamis lenne, akkor azt $p(m)$ eldönthetősége miatt el is lehetne dönteni. De ilyenkor $p(m)$ eldöntése $(\forall y)p(y)$-t is eldöntené, mégpedig a döntés eredménye az lenne, hogy T hamis. Ekkor viszont T eldőlt, tehát T nem lehet hamis, mert akkor lenne olyan m, amire $p(m)$ hamis, és T *eldőlne.* Vagyis T *csak igaz lehet.* De ez utóbbi bizonyítási lépés szintén eldöntötte, hogy T milyen, ami lehetetlen, lévén T eldönthetetlen. T tehát se nem hamis, se nem igaz, ami viszont lehetetlen, azaz ilyen T nem létezhet.

Ez a gondolatmenet a formális alapokra helyezett gondolatmenetéből derül ki. A nem formálisan tárgyalt szakaszokban Kalmár a *„T csak igaz lehet”* résznél úgy fogalmaz, hogy ez nem ellentmondás, csak *furcsaság.* Vajon milyen lehet egy olyan állítás, melyről tudjuk, hogy igaz, de ez semmilyen véges eljárással nem bizonyítható. Kalmár legalább háromszor játsza el azt, hogy ellentmondást is sejtet, de annak létét tagadja is.

Church-téziséből – ahogy azt Kalmár is többször kihangsúlyozza – nem eldönthetetlen aritmetikai probléma, hanem eldönthetetlen aritmetikai problémasereg következik. Van-e adott problémasémához egységes megoldó séma? Church válasza, hogy ilyen nem mindig van, ami nagyon hihető válasz és egybevág az intuíciónkkal. Még ha lenne is minden egyes problémára

[6] [Gödel31, p. 609]

megoldás, vajon miért kéne, hogy létezzen általános megoldóséma mely mindegyiket ugyanúgy oldja meg?

2. A ψ függvényes argumentum.

2.1. Az érv formája, analitikus filozófiai munkamódszer. A két cikk központi részén helyezkedik el az az argumentum, amelyet a hírhedt ellenpéldaként emlegetünk. Kalmár érve paszentosan követi az analitikus filozófia egy jellegzetes érvelési sémájának formáját, éspedig a két (vagy több) premissza esetén végigvitt redukció ad abszurdum módszerét. Erre a legegyszerűbb példa a *hazug antinómiájának* alkalmazása a következő két premissza esetén:

1. minden kijelentő mondat vagy igaz vagy hamis, de egyszerre mindkettő nem lehet (kétértékűség elve), és
2. egy kijelentő mondat akkor és csak akkor igaz, ha az, amit állít, a valóságban is úgy van (Arisztotelész korreszpondencia elve)

Az „Ez a mondat hamis.” mondat elemzésével kimutatható, hogy a két premissza nem teljesülhet egyszerre. Világos, ha az „Ez a mondat hamis.” igaz, akkor 2. miatt az van, amit állít, azaz hamis, ami ellentmond 1.-nek, ti., hogy egy mondat nem lehet egyszerre igaz is és hamis is. Ha az „Ez a mondat hamis.” hamis, akkor megint 2. miatt annak az ellenkezője van a valóságban, mint amit állít, vagyis a szóban forgó mondat igaz, ami szintén ellentmond annak, hogy egy mondat nem lehet egyszerre igaz is és hamis is. De 1. miatt más eset meg nem lehet, ezért a két premissza összeférhetetlen, együtt ellentmondásos elméletet alkotnak.

2.2. A premisszák. Kalmár premisszái a következők. Tegyük fel

(T) a kizárt harmadik elvét és
(C) a Church-tézist.

(T) tehát azt mondja, hogy nincs olyan állítás, mely se nem igaz, se nem hamis, (C) pedig azt, hogy a kiszámítható függvények az általános rekurzív függvények.

2.3. Az érv. Kleene mutatott példát olyan $\varphi(x, y)$ kétváltozós számelméleti függvényre, mely *kiszámítható* (általános rekurzív függvény, de ilyen primitív rekurzív ill. elemi aritmetikai függvény is van), de amire a

$$\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\mu y)[\varphi(x, y) = 0]$$

függvény *nem* általános rekurzív. Itt μ a Kleene-μ-operáció, azaz

$$(\mu x)[p(x)] = \begin{cases} \min\{x \mid p(x)\}, & \{x \mid p(x)\} \neq \emptyset \\ 0, & \{x \mid p(x)\} = \emptyset \end{cases}.$$

Ha n olyan szám, melyre

(1) van olyan y, hogy $\varphi(n, y) = 0$, *vagy*
(2) van olyan $\Gamma_{\psi(n)}$ bizonyítás, mely igazolja, hogy minden y-ra $\varphi(n, y) \neq 0$,

akkor ψ ezen az n helyen kiszámítható.

Ugyanis (1) esetén $\psi(n)$ kiszámításához csak annyit kell tennünk, hogy rendre kiszámítjuk a

$$\varphi(n, 0), \quad \varphi(n, 1), \quad \varphi(n, 2), \quad \ldots$$

számokat mindaddig, míg az első olyan m számot nem érjük el, melyre $\varphi(n, m) = 0$ és ekkor $\psi(n)$ értéke m lesz. (2) esetén pedig a $\Gamma_{\psi(n)}$ bizonyítás véges lépésben igazolja, hogy nincs olyan m, melyre $\varphi(n, m) = 0$ és ekkor $\psi(n) = 0$ lesz.

(C) szerint ψ nem kiszámítható, mert Kleene bebizonyította, hogy ψ nem általános rekurzív, ezért (T)-t alkalmazva van olyan sem az (1)-et sem a (2)-t nem teljesítő n szám, melyre $\psi(n)$ nem kiszámítható. Az iménti gondolatmenettel véges lépésben bizonyítottuk, hogy van olyan n, melyre (az (1) ill. (2) feltételeket tagadva)

(a) minden y-ra $\varphi(n, y) \neq 0$, *és*
(b) nincs olyan bizonyítás, mely igazolja, hogy $(\forall y)(\varphi(n, y) \neq 0)$

(a)-t tehát bizonyítottuk, azaz $(\forall y)(\varphi(n, y) \neq 0)$-nek van bizonyítása. De (b)-t is bizonyítottuk, ami ez utóbbi megállapítással együtt már ellentmondás.

(C) és (T) tehát nem állhat fenn egyszerre.

2.4. Kalmár hangsúlyának áthelyezése (C)-ről (T)-re. Az már az angol nyelvű cikkben is megfogalmazódik, meglehetősen korrekt módon, hogy ha valaki nem szeretné hallani azt, hogy a Church-tézis hamis, akkor koncentráljon arra, hogy (T)-vel vannak gondok. Valóban! Milyen eljárás az, mely indirekt egzisztenciabizonyítással választ ki egy n-et és ezzel dolgozik tovább? Világos, hogy a fenti érvbeli bizonyítást egy intuicionista érvelő nem fogadná el. Egy konstruktivista (algoritmusok készítésében érdekelt) matematikus pedig az ellen tiltakozna, hogy a szóban forgó bizonyítást, mely egy n létezését nem igazolja konstruktívan, eljárásnak tekintsük. Kalmár a magyar nyelvű cikkben egyértelműen (C) ellen hozza föl az érvét, de valójában (T) alkalmazhatósága, ami sokkal kétségesebb.

2.5. Formalizálhatóság kérdése. A matematikai bizonyítások jóságának szükséges elvi kritériuma, hogy a gondolatmenet elvileg formalizálható legyen. Kalmár meg is próbálja formalizálni, valameddig el is jut, de aztán kijelenti, hogy az érvben szereplő „bizonyítható” kitétel nem ragadható meg formálisan. Ez elég nyilvánvalóan következik abból, hogy ha magát a Church-tézis sem tudjuk formalizálni, akkor egy olyan érvet sem tudunk, ami a Church-tézist tartalmazza.

3. A „Kalmár-eljárás”.

Kalmár nem csak a ψ függvényes érvet prezentálja a cikkben, hanem az érvben szereplő függvényről is állítja, hogy

> [ψ] nem általános rekurzív függvény, de effektíve kiszámítható; [...][7]

Látni fogjuk (Kalmárt követve), hogy 1) ψ nem általános rekurzív függvény (semmilyen értelemben sem), 2) de nem lehet bizonyítani, hogy ψ nem effektíve kiszámítható. A ψ kiszámítására javasolt eljárás definíciója során Kalmár használja a *„megpróbáljuk”* szót. Ezen ne akadjunk fönn! Éppen olyan eljárást akar definiálni, mely *nem* általános rekurziós eljárás, ám amiről nem fogjuk tudni belátni, hogy nem számítja ki véges lépésben $\psi(n)$-et, éspedig nem azért mert rosszul van definiálva az algoritmus, hanem mert a definíciójába bele van építve, hogy ne lehessen cáfolni a javasolt eljárás szerinti kiszámíthatóságot. Mindamellett persze a ψ-t kiszámító eljárás definícióját egy számítástudománnyal foglalkozó szakember legalább is kétkedéssel fogadja.

[7] [Kalmár56, 33. o.]

3.1. Definíció. Legyen φ olyan Kleene által talált általános (vagy primitív, vagy elemi) rekurzív függvény, melyre $(\mu y)[\varphi(n,y)=0]$ nem általános rekurzív függvény. Ekkor legyen

$$\psi(n) = (\mu y)[\varphi(n,y)=0]$$

Ez tehát azt jelenti, hogy

$$(\mu y)[\varphi(n,y)=0] = \begin{cases} \min\{y \mid \varphi(n,y)=0\}, & \{x \mid \varphi(n,y)=0\} \neq \emptyset \\ 0, & \{y \mid \varphi(n,y)=0\} = \emptyset \end{cases}.$$

3.2. „Kalmár-eljárás”. Tetszőleges n természetes számra a $\psi(n)$ kiszámítására javasolt

$$K_\psi(n)$$

eljárás a következő:

(1) kiszámítjuk rendre a

$$\varphi(n,0), \quad \varphi(n,1), \quad \varphi(n,2), \quad \ldots$$

értékeket és megnézzük, hogy 0-e; ha van ilyen, akkor $\psi(n)$ a legkisebb második argumentum lesz, amire $\varphi(n,y)=0$;

(2) mindeközben *„megpróbáljuk”* bizonyítani, hogy

$$(\forall y)[\varphi(n,y) \neq 0];$$

ha ez sikerül, akkor legyen $\psi(n)=0$.

3.3. Kalmár-tétel.

$$\nvdash (\exists n)(K_\psi(n) \text{ nem terminál})$$

Ugyanis, ha lenne ilyen Γ_{K_ψ} bizonyítás, akkor az azt bizonyítaná, hogy van olyan n szám, melyre $\psi(n)$ nem kiszámítható, vagyis az eljárás nem jár sikerrel

- sem az (1) pontjában,
- sem a (2) pontjában.

A véges Γ_{K_ψ} bizonyítás tehát *azt is bizonyítja,* hogy (1) nem jár sikerrel: nincs olyan y, melyre $\varphi(n,y)=0$. Ez azonban éppen a (2) pontban megkívánt feltétel, azaz *„sikerült”* bizonyítani, hogy $(\forall y)[\varphi(n,y)\neq 0]$. Ez viszont ellentmond annak, hogy Γ_{K_ψ} azt is bizonyítja, hogy *„nem sikerül”* bizonyítani, hogy $(\forall y)[\varphi(n,y)\neq 0]$.

3.4. Kalmár konklúziója... Kalmár László szerint a „valódi matematikában”, azaz a nem formális matematikában, a természetes számok igazi világában a $(\forall n)(K_\psi(n)$ terminál) állítás vagy igaz vagy hamis. Mivel a Kalmár-tétel miatt $(\forall n)(K_\psi(n)$ terminál) tagadása nem levezethető, ezért nem lehet hamis, azaz igaz. Ezért gondolja ő, hogy az eljárása effektíve kiszámítja a ψ-t, bár ezt nem bizonyítja, csak tézisként felteszi azzal a megjegyzéssel, hogy lehetetlen az ellenkezőjét igazolni. Ezt hosszasan fejtegeti is egy olyan bekezdésben, ami világosan mutatja, hogy milyen filozófiai alapállást oszt és hol találhatjuk az általa bemutatott paradoxon feloldását, ha addig nem találtuk volna meg:

> Így pl. a Goldbach-féle sejtés az objektív valóságnak azt a feltételezett tulajdonságát fejezi ki, hogy ha bizonyos tárgyakat ki lehet rakni két sorba úgy, hogy mindegyikben ugyanannyi tárgy legyen, akkor e tárgyakat szét lehet választani két olyan csoportba, hogy egyik csoportban lévő tárgyakat sem lehet egynél több sorban elrendezni, úgy, hogy minden sorban ugyanannyi, de egynél több tárgy legyen. Hasonlóan látható, hogy ha φ elemi függvény és n nemnegatív szám, akkor

> az az ítélet, hogy [„]nincs olyan y nemnegatív egész szám, hogy $\varphi(n, y) = 0$[”], az objektív valóságban meglevő valamely (esetleg nagyon bonyolult) mennyiségi törvényszerűséget fejez ki. Eszerint a Church-féle hipotézisben benne rejlik az az állítás, hogy van olyan törvényszerűség, amely az objektív valóságban megvan, de az, hogy megvan, semmiféle helyes meggondolással nem látható be. Ezt az állítást nem fogadhatja el senki, aki meg van arról győződve, hogy az objektív valóságban meglévő törvényszerűségek megismerhetőek; ennélfogva a Church-féle hipotézist sem fogadhatja el. [Kalmár56, 34. o.]

3.5. . . . és, ami nem Kalmár konklúziója. Kalmár nyilvánvalóan nem olyan „eljárásokról” és „bizonyításokról” beszél, melyeket egy számítástudománnyal foglalkozó elfogadna, hanem olyanokról, amiket egy absztrakt logikával foglalkozó ki tud gondolni. Éppen ezért még abban az esetben is, ha egy számításelmélettel foglalkozó elfogadná K_ψ-t effektív eljárásnak, akkor sem lenne feltétlenül meggyőződve arról, hogy Γ_{K_ψ} olyan bizonyítás, mely elfogadható a (2) lépésben felhasználhatónak. Ugyanis Γ_{K_ψ} nem feltétlenül konstruktív. A Kalmár-tétel tehát csak annyit állít, hogy

$$\nvdash_I (\exists n)(K_\psi(n) \text{ nem terminál})$$

azaz intuicionista vagy konstruktivista módon nem bizonyítható $(\exists n)(K_\psi(n)$ nem terminál). Éppen a Kalmár által propagált klasszikus logikai (nemkonstruktív) értelemben lehet, hogy $(\exists n)(K_\psi(n)$ nem terminál) mégis bizonyítható. Mindent összevetve tehát azt mondhatjuk, hogy Kalmár eljárása nem konstruktív eljárás, ami éppen azt kérdőjelezi meg, hogy hagyományos értelemben eljárás-e és összehasonlítható-e egyáltalán a kiszámítható függvények értékeit kiszámító eljárásokkal.

4. A ψ függvényes argumentum értékelése

Kalmár László érve tehát azt állítja, hogy a Church-tézis és a kizárt harmadik elve nem férnek össze. Mármost lehet ez meglepő, hiszen informatikai és matematikai logikai tanulmányaink elején belénk ivódott, hogy az „iskolai logika” az igaz-hamis értékelésről, az egyesek és nullákról mond valamit, így a kétértékűség elvén kívül nem nagyon van más *értelmes logika,* a többi legfeljebb érdekesség. Ám, természetesen ez egy nagyon naiv megközelítés. Az ugyan igaz, hogy a matematikai objektumokról állítást tevő matematika olyan természetű, hogy a kijelentő mondatai az igazra és hamisra referálnak, azaz klasszikus kétértékű logikát feltételeznek. Ebből azonban nem következik a matematikai objektumokról állítást tévő mondatokról állításokat tevő *metamatematika* (nem hilberti értelemben, hanem Tarski szerint értve) logikája kétértékű logika lenne. Tudjuk, hogy a számítástudomány (informatika?) inkább a konstruktív logikai érveléseket részesíti előnyben, míg a kvantummechanika számára a kvantumlogika egy nem természetellenes logika. Ugyanígy lehet érvelni amellett, hogy annak a tudománynak, amit a matematika metatudományának nevezhetünk nem klasszikus a logikája, hanem intuicionista. Hangsúlyozzuk, nem arról beszélünk, hogy Brouwernek igaza lenne és a matematika belső logikája intuicionista, hanem a matematika matematikája követ intuicionista logikát. Márpedig Kalmár érve éppen erre szolgáltat alapot. Azt mondja ugyanis, hogy ha a metatudomány klasszikus logikájú lenne, akkor nem állna a Church-tézis. Ez azt jelentené, hogy az eddig megtalált és egymással összhangban álló számításelméleti javaslatokkal szemben lehet olyan kiszámítási módszert is effektív kiszámítási algoritmusnak nevezni, mely nem rekurzív függvényekre alapul és nem is ekvivalens az ezekre építő kiszámítási eljárásokkal. Ám, a számításelméleszek tapasztalata szerint a rekurzív függvények úgy vannak definiálva, hogy a végsőkig feszítik az emberi elmével felfogható effektív kiszámíthatóság fogalmát. Ha ezt el kell hagyni, akkor kilépünk az emberi elmével felfogható számítási eljárások köréből, azaz átadjuk a stafétát olyan lény kezébe, aki olyan eljárásokat is átlát, melyeket mi nem. Nem kizárt, hogy van ilyen lény. De ezt állítani pont ugyanannyira merész, mint azt állítani, hogy olyan dolgokat is megismerhetünk, melyekhez véges eljárásokkal nem juthatunk el.

A feloldás az lehet, ha felismerjük, hogy az érvben nem pusztán tipikus algoritmusokról beszélünk, hanem olyan kiszámítási eljárásokról, melyek más kiszámítási algoritmusokról tesznek állításokat. Ezek tehát a metatudomány érdeklődési körébe tartoznak, aminek a logikája konstruktív. Ha ezt elfogadjuk, akkor *megmaradhat* a Church-tézis. Ha elvetjük, akkor ezzel együtt a Church-tézist is *el kell vetnünk.*

Végül két megjegyzés. Függetlenül attól, hogy a cikk a szakirodalomban vitatott és legalább is számításelméleti nézőpontból kételyeket ébreszt, Kalmár egyes észrevételeit tekinthetjük matematikafilozófiailag előremutatóknak. Ez azért van, mert tőle függetlenül hasonló irányba kezdtek keresgélni olyan gondolkodók, mint Gödel vagy Dummett. Gödel a *Néhány tétel a matematika megalapozásáról és ezek következményei* c. cikkében azt latolgatja, hogy ha a matematika idővel egyre komplexebb és komplexebb struktúrákat vizsgál, akkor vajon létezhetnek-e ezekre vonatkozó olyan matematikai érvelési formák, melyeket ezidáig nem ismerünk. Dummett pedig a *The Philosophical Significance of Gödel's theorem* c. cikkében olyan „transzrekurzív" bizonyítási módokat javasol, amelynek alapján érvelni lehet amellett, hogy a Gödel-mondat igaz. Ezeket a közelebbről nem körülhatárolt, de furcsa dolgokat nem azzal a céllal javasolják ezek a szerzők, hogy olyan függvényeket is kiszámíthatónak nevezzünk, amelyek a tapasztalataink szerint egyáltalán nem kiszámíthatók, hanem azért hogy ráirányítsák a figyelmünket arra, hogy létezhetnek olyan matematikai vagy logikai érvelési formák, amiket még nem ismerünk, nem érzünk a magunkénak, de amiket egy napon felfedezhetünk és talán használhatunk is a bizonyításokban.

Hivatkozások

[Kalmár59] Kalmár László, *An Argument Against the Plausibility of Church's Thesis,* In Heyting, A. (ed.) Constructivity in Mathematics, North-Holland, 1959.

[Kalmár56] Kalmár László, *Az ún. megoldhatatlan matematikai problémákra vonatkozó kutatások alapjául szolgáló Church-féle hipotézisről,* Az MTA Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei, 7. 1957.

[Gödel51] Kurt Gödel, *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implication,* in: Collected Works III. Ed: S. Feferman. Oxford Press. 1995.

[Gödel31] Kurt Gödel, *Kurt Gödel, On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems,* in: From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931. ed.: Heijenoort.

[Dummett] Michael Dummett (1963) *The philosophical significance of Gödel's theorem,* Ratio 5, 140–155. Reprinted in M. Dummett: Truth and Other Enigmas, Duckworth, London, 1978, 186–201.