CHARLES PARSONS

MATEMATIKAI SZEMLÉLET*[x]

Gödel egy sokat idézett helyen a következőket írja:

> „Dacára a halmazelméleti tárgyak elszigeteltségének az érzéki tapasztalattól, igenis létezik valami észlelésféle az ilyen tárgyak vonatkozásában is; ez derül ki abból, hogy az axiómák valósággal ránk kényszerítik önnön igazságukat. Nem látok olyan okot, amiért kevésbé bízhatnánk az efféle észlelésben – tehát a matematikai szemléletben –, mint az érzéki észlelésben."[1]

Ha eltekintünk a halmazelméletre való konkrét utalástól, ez a szövegrész klasszikus megfogalmazását adja annak, amit a matematikai intuíció vagy matematikai szemlélet filozófiai koncepciójának nevezhetnénk. Úgy látom, ennek az elképzelésnek az a legfontosabb ismertetőjegye, hogy analógiát von az érzéki észlelés mint a fizikai valósággal szembeni kognitív viszony és „valami észlelésféle" között, ami hasonló viszonyt teremt a matematikai tárgyakkal – sőt esetleg más absztrakt tárgyakkal is. Ha tehát az utóbbinak központi szerepet szánunk a matematikafilozófiában, ez a szerep hasonló kell hogy legyen ahhoz, amit az érzékelés játszik a hétköznapi valóságról szóló és a fizikai tudásunkban.

Tanulmányomban e koncepció alapos végiggondolásába szeretnék belevágni. Amellett fogok érvelni, hogy valóban lé-

* Első megjelenése: *Proceedings of the Aristoteilian Society N. S. 80* (1979–80), 145–168. p. A fordítást az Aristotelian Society szerkeszőjének szíves engedélyével közöljük, ©1980.

[x] Az angol filozófiai szaknyelvben az *intuition* egyrészt intuíciót, közvetlen belátást jelent, másrészt a kanti *Anschauung* terminológiai megfelelője. Mivel Parsons tanulmánya döntően az utóbbiról szól, az előfordulások többségében a *szemlélet* szót használtuk. Az *intuition* és a matematikai intuicionizmus vonatkozásában lásd jelen tanulmány 10. jegyzetét. (*A ford.*)

[1] [Gödel 1947], 483–484. p. A szövegrész az alább idézettekhez hasonlóan [Benacerraf–Putnam 1983] 1964-es első kiadásához írt függelékből való.

tezik valami, ami megfelel a koncepciónak. Ennek a pozitív eredménynek azonban igen szűk az érvényességi köre, és már ebben a szövegben meg fognak mutatkozni az elképzelés korlátai. Gödellel szemben nem a halmazelméletre fogok koncentrálni, ott ugyanis a szemlélet fogalma sajátos nehézségekkel találja szemben magát; ezeket a nehézségeket máshol már részleteztem.[2] Jobbak az esélyeink az előrelépésre, ha a legegyszerűbb esetekre koncentrálunk; mondjuk az elemi geometriára vagy az aritmetikára. Én az utóbbit választom, de bizonyos értelemben az aritmetikát is geometriai nézőpontból fogom vizsgálni.

I.

Amikor Gödel valami észlelésféléről beszél, aminek *tárgyai* halmazelméleti tárgyak, ezzel olyasmit fogalmaz meg, ami központi jelentőségű az általam vizsgált koncepció szempontjából. A matematikai szemlélet ugyanis sajátosan *de re* természetű; a megismerő és bizonyos (vélhetően matematikai) *tárgyak* közötti viszonyt jelent. Az érzéki észlelés kifejezéstára olyan fordulatokat tartalmaz, amelyek fizikai tárgyakhoz vagy eseményekhez való viszonyunkat fejezik ki: a látja x-et, a hallja x-et, a észleli x-et és így tovább. Az egyik legfogósabb kérdés éppen az, hogy ezeknek a fordulatoknak mennyiben kell megőrizni az eredeti jelentését, ha a matematikai szemléletre vonatkoztatjuk őket.

Néhány észleléssel kapcsolatos ige – különösen a „lát" és az „észlel" – esetében a fentihez hasonló, tárgyra vonatkozó használatot szembeállíthatjuk azzal, amikor az ige mondatkiegészítőként szerepel; ezt az utóbbit propozicionális attitűdhasználatnak nevezhetjük. Vitatott, hogy melyik használat az elsődleges, de a tárgyra vonatkozó használat *léte* tagadhatatlan. Nem így a matematikai szemlélet esetében és a filozófusok sem fogalmaztak valami világosan ebben a kérdésben.

[2] Charles Parsons: What is the Iterative Conception of Set? In [Benacerraf–Putnam 1983], 503–529. p.

Mindazonáltal mindkét használat felbukkan a filozófiai irodalomban.[3] Hogy rövidebbre fogjam a „szemlél" ige tárgyra vonatkozó és propozicionális attitűdöt kifejező használatára való utalást, *tárgyi* szemléletről, illetve *propozicionális* szemléletről fogok beszélni.[4]

Már Gödel fentebb idézett szövege is mutat némi bizonytalanságot: az, hogy van „valami észlelésféle az ilyen [tudniillik halmazelméleti] tárgyak vonatkozásában is", mint mondja, „[abból] derül ki, hogy az axiómák valósággal ránk kényszerítik önnön igazságukat". Gödel itt bizonyos *állítások* nyilvánvaló voltából – ezt propozicionális szemléletként jellemezhetjük – arra látszik következtetni, hogy létezik tárgyi szemlélet. A premissza sem éppen vitathatatlan, de még ha elfogadjuk igaznak, a *következtetés* maga akkor is *non sequitur*. Amit pedig Gödel magyarázat (és alighanem pontosítás) gyanánt hozzáfűz a következő bekezdésben, az megint csak nem túl világos.

A tárgyi szemlélet persze hagyományos racionalista téma. Akár az összes olyan felfogás közös nevezőjének is tekinthetjük, amely az észigazságok evidenciáját vagy magától értetődő voltát nem a szokásra, a gyakorlatra vagy a konvencióra vezeti vissza. Éppen ezért az érzéki észleléssel való párhuzam nem is lép be a képbe mindaddig, amíg nem ezzel az analógiával *magyarázzák* az értelmi evidenciát, vagy esetleg nem ennek segítségével világítják meg a valóban evidens és a csupán nyilvánvalóan igaznak tűnő kijelentés közötti különbséget. Ha viszont ezt teszik, az analógia várhatóan a tárgyi szemlélet felé fog elmozdulni – egészen egyszerűen azért, mert a tárgy jelenléte nélkülözhetetlen az érzéki észlelésben.

Úgy vélem, Descartes-nál éppen ilyen elképzelésre találhatunk példát; számára a *clare et distincte észlelés* minden bizonnyal elsősorban kijelentésattitűd.[5] Két jelentős filozófust

[3] [Steiner 1975] rámutatott a megkülönböztetés jogosultságára a matematikai intuíció vonatkozásában. Steiner azonban úgy véli, hogy senki sem venné védelmébe a tárgyra vonatkozó használatot. Ez szerintem egyértelműen hamis.

[4] Az eredetiben: intuition *of*, illetve intuition *that*. (*A ford.*)

[5] Úgy tűnik, Descartes a magyarázataiban már támaszkodik a tárgyi észlelésre; így például a világos észlelésről adott magyarázatában is, az *Alapelvek*

említhetünk a múltból, akik eléggé egyértelműen elkötelezték magukat a tárgyi szemlélet mellett és akiknél a szemlélet tárgyai matematikai tárgyak is lehetnek: Kantot és Husserlt. Kantnál a szemlélet mint propozicionális attitűd nem jut explicit szerephez. A szemlélet definíció szerint egyedi megjelenítés; tehát egy egyedi tárgy megjelenítése.[6] Amikor Kant *A tiszta ész kritikájá*ban azt írja, hogy a tudás a szemlélet révén kerül „közvetlen kapcsolatba" a tárgyakkal (A19/B33),[7] ez úgy hangzik, mintha arról volna szó, hogy a tárgy közvetlenül jelen van az értelem számára. A szemlélet minden egyes esetben „közvetlen evidenciával" ruházza fel a – mondjuk geometriai – állításokat.[8] Ennek alapján úgy tűnik, a propozicionális szemlélet is jelen van Kantnál, noha hivatalosan csak a tárgyi szemléletre használja a kifejezést.

Husserl a *kategoriális szemlélet* elemzésével a *Logische Untersuchungen*ben és a *lényegszemlélet* elemzésével az *Ideen*ben[9] állhatatos és izgalmas kísérletet tesz az értelmi evidencia egy olyan elméletének kidolgozására, amely az észlelés analógiájára épül. Ebben az elméletben központi jelentőséget nyer az a körülmény, hogy mindig tárgyat észlelünk. Husserl az értelmi evidenciát általánosságban *szemléletként* fogja fel, és arra vállalkozik, hogy egységes keretben tárgyalja a tárgyi és a propozicionális szemléletet.

Mind Kant, mind Husserl szemléletfelfogása hatással volt a matematika megalapozása körüli 20. századi vitákra. Kant esetében a hatás látványosabb és szélesebb körű. Hilbert el-

---

I., 43-ban [Descartes 1996]. (Parsons a 40. paragrafusra hivatkozik; ott azonban nem a *clare et distincte* észlelésről, hanem az eleve elrendeltségről van szó. – *A ford.*)

[6] Kant: *Logik*, 1. §, lásd [Kant 1910–] IX., 91. p.

[7] [Kant 1995], 77. p.

[8] A tárgyakra vonatkozó szemlélet közvetlenségére adott értelmezésem vitatható. A kérdésről lásd [Parsons 1969], különösen 569–571. p., valamint [Hintikka 1972]. Ugyanakkor elképzelni sem tudom, miképpen lehet vitatni azt a tényt, hogy Kant szerint a szemlélet (különösen az a priori szemlélet) közvetlen *evidenciával* ruház fel. Ez a közvetlenség biztosan nem vezethető vissza az egyediségre, ahogy azt Hintikka a közvetlenség más aspektusai esetében javasolja.

[9] [Husserl 1984], illetve [Husserl 1976].

képzelése a finit matematika szemlélethez kötöttségéről kimondottan a tiszta szemlélet kanti felfogásán alapult, bár talán inkább támaszkodott Kant geometriai, mint aritmetikai nézeteire. Az intuicionizmus is sokat köszönhet Kantnak, különösen abban, hogy az időt a belső érzékelés formájaként fogta fel. Husserl nézeteinek közel sem volt ekkora hatása, de azért befolyásolták Weyl és Gödel gondolkodását.[10]

II.

Ennek a „valami észlelésfélének" a gondolata a matematikai tárgyak vonatkozásában első pillantásra kimérának tűnik. Ha a matematikai tárgyak hasonló módon adottak a számunkra, mint a fizikai tárgyak az érzékeink számára, ennek nem kellene *nyilvánvalónak* lennie? Ám a matematikáról szóló filozófiai viták története épp az ellenkezőjét mutatja. Bármilyen titokzatosság és bármilyen filozófiai talányok vegyék is körül az észlelést, az többé-kevésbé mégiscsak hamisítatlan empirikus fogalomként működik. Többnyire nagy biztonsággal meg tudjuk ítélni, hogy mikor észlelünk valamit és mikor nem; és a tapasztalatunk leírásába vetett bizalmunkat gyakran érintetlenül hagyja a kétely, hogy valójában mi is az, amit megtapasztaltunk. Nem hiszem például, hogy lenne olyan filozófus, aki ha most a szobámba téved, vitatná azt a kijelentést, hogy én egy írógépet *látok* magam előtt, benne papírral – hacsak nem szkeptikus argumentumok alapján. De jobbára még ez utóbbiak sem érintik az olyan gyengébb kijelentéseket, mint hogy *úgy tűnik*, mintha ezeket a dolgokat látnám. Itt egy fenome-

[10] Gödel így ír Hilbertről: „Amit Hilbert *Anschauung*on ért, az lényegében nem más, mint Kant tér- és időszemlélete, jóllehet véges számú diszkrét tárgy konfigurációjára korlátozva." ([Gödel 1958] kiadatlan, a szerző által javított és kiegészítő megjegyzésekkel ellátott angol fordítása, *h* megjegyzés. Mintha csak a [Gödel 1947] szemléletfogalmától való eltérést akarná hangsúlyozni, az *Anschauung* fordítása itt *concrete intuition* [konkrét szemlélet].)

Az intuicionizmus talán legeredetibb és legtermékenyebbnek bizonyult ötlete az, hogy a matematikai állítások jelentését a bizonyításukban látja. Ez a gondolat nemigen köthető Kanthoz. Az intuicionizmus alapjairól szóló mai vitákból mintha teljesen kimaradna a szemlélet voltaképpeni fogalma.

nológiai adattal van dolgunk, amely olyan közel áll a kétségbevonhatatlansághoz, amennyire ez a filozófiában egyáltalán lehetséges.

Nehéz volna kitartani amellett, hogy ugyanez a helyzet a matematikai tárgyakkal is. Vajon *nyilvánvaló*, hogy létezik a 7 szám vagy egy háromszög szemléletének tapasztalata, vagy legalábbis e szemlélet „látszatának" tapasztalata? Hivatkozhatunk-e ezúttal bármiféle tapasztalatra, amely akár csak közel annyira is kétségbevonhatatlan, mint az én mostani tapasztalatom az írógépem látványáról? Ha pedig nem tudunk mire rámutatni, nem szenved-e máris súlyos törést az analógia az érzéki észlelés és a matematikai tárgyakról való tudomásunk között, bármi legyen is az utóbbi?

Ezek a kétségek összekapcsolódnak egy olyan kérdéssel, ahol az analógia nyilvánvalóan sántít. A mindennapi észlelési szituációkban az észlelt tárgy fizikailag hat az érzékszerveinkre. Észlelésünk mintegy ezen a hatáson alapul, és súlyos filozófiai érvek szólnak amellett, hogy az ilyen oksági viszony szükséges feltétele a tárgy észlelésének.[11] Nem volna túl meggyőző az a feltevés, hogy a *matematikai* szemléletben is oksági hatással van ránk (éspedig vélhetőleg az értelmünkre) a matematikai tárgy. Ezt még a matematikai szemlélet említett hívei sem gondolják így, bár néha felbukkan egyes népszerű „platonista" elképzelésekben.

Ezen a ponton olyan finom megkülönböztetéseket találunk a matematikai szemlélet leírásaiban, amelyek felvetik a kérdést, hogy mennyire kell szorosan venni az analógiát az észleléssel. Gödel szerint „a matematikai szemléletet nem kell olyan képességnek tekinteni, amely a szóban forgó tárgy *köz-*

[11] Husserlnek az észlelés és az absztrakt tárgyakról szerzett tudás közötti analógia kidolgozására tett kísérletében segítségére van saját fenomenológiai perspektívája. Az észlelés oksági megalapozása nem tartozik a fenomenológia tárgyához, még annak [Husserl 1984]-ban kifejtett változata szerint sem. Husserl annak megmutatására vállalkozik, hogy a kategoriális szemléletben van valami, ami analóg az érzetekkel az érzéki észlelésben. Úgy látom, hogy ennek magyarázata homályosra sikeredett ([Husserl 1984] VI., 56. §). Nem tudom biztosan megmondani, milyen mértékben lehet ezt a homályosságot eloszlatni.

vetlen megismerését teszi lehetővé".[12] Husserl még odáig is hajlandó elmenni, hogy a kategoriális szemléletet *„észlelésnek"* (*Wahrnehmung*) nevezze,[13] de ezt szembeállítja az érzéki észleléssel, amely *schlicht* [egyszerű], s benne a tárgy „közvetlenül adott". A kategoriális szemlélet más „aktusokon" *alapul*, így például a szokványos észlelésen és képzeleten.[14]

Kant megfogalmaz egy aporiát azzal kapcsolatban, hogy miképpen lehet a szemlélet a priori. A *Prolegomena* 8. §-ában így fogalmaz, mindjárt azután, hogy a tiszta szemlélet fogalmát bevezette:

> „A szemlélet olyan megjelenítés, amely közvetlenül a tárgy jelenlététől (*Gegenwart*) függ. Éppen ezért lehetetlennek látszik, hogy *a priori* módon *eredeti* (*ursprünglich*) szemlélethez jussunk, mert a szemléletnek ekkor nélkülöznie kellene minden – akár korábban, akár most – jelen levő tárgyat, amelyre vonatkozhatnék – ennek folytán azonban nem lehetne szemlélet. Miként előzhetné meg akkor a tárgy *szemlélete* magát a tárgyat?"[15]

Kant itt (és máshol) nem fejti ki nézeteit a *matematikai* tárgyakra vonatkozó szemléletről. A kontextusból egyértelműen kiderül, hogy a *tárgy* itt *valós* tárgyat jelent; voltaképpen fizikai tárgyat. Így aztán a kérdés az, hogy miképpen „vonatkoz-

[12] [Gödel 1947], 483–484. p.

[13] [Husserl 1984] VI., 45. §.

[14] I. m. 46. §.

[15] [Kant 1999], 40-41. p. – Kant ezen aporiája nem független attól a dilemmától, amit Paul Benacerraf vetett fel ([Benacerraf 1973]). Benacerraf szerint a rendelkezésünkre álló legjobb elmélet a matematikai *igazságról* (vagyis Tarski igazságfelfogása) magában foglalja a matematikai tárgyak létének feltételezését, míg a *megismerésre* adott legjobb magyarázatunk a megismert tárgyak és a megismerő közötti oksági viszonyt feltételezi; a matematikai tárgyak azonban nem vehetnek részt oksági viszonyokban.

Kant aporiáját is átfogalmazhatjuk hasonló dilemmává: a matematikai igazság megköveteli az alkalmazhatóságot a fizikai valóságra. De a matematikai megismerésre adott legjobb magyarázatunk a szemléletre vezeti vissza a matematikai ismeretet. A szemlélet pedig feltételezi a tárgy előzetes jelenlétét. Ez azonban ellentmond a matematika a priori jellegének.

A problémának ez a megfogalmazása azért is érdekes, mert nem használja ki, hogy a matematika szemantikája magában foglalja a matematikai tárgyak feltételezését (ami elkerülhetőnek tűnik a kvantorok modális értelmezésével). Más feltevésekre persze támaszkodik; különösen arra, hogy a matematika a priori.

hat" a priori szemlélet fizikai tárgyakra, amelyek nem a priori adottak.

A 9. §-ban Kant a következő megoldással áll elő a dilemmára: az a priori szemlélet érzékelőképességünknek csupán a formáját tartalmazza. Fogas kérdés, hogy ez a belátás mennyiben is módosítja a szemléletnek azt a jellemzését, amely a dilemma alapjául szolgált. Annyi bizonyos, hogy az a priori szemlélet esetében le kell mondanunk az oksági viszonyról a szemlélet tárgya és a szemlélő között. Más kérdés, hogy valamely tárgy *fenomenológiai* jelenléte megőrződik-e, és ha igen, miképpen. Megint más kérdés, hogy fizikai vagy tisztán matematikai tárgy van-e jelen fenomenológiai értelemben. Az előbbi lehetőséget nem zárja ki a tiszta szemlélet a priori természete, hiszen itt arról a „jelenlétről" lehet szó, ami a *képzelőerőt* jellemzi, nem pedig arról, ami az érzékelést. Kant műveinek számos szöveghelye valóban megerősíti, hogy éppen ez volt az álláspontja.

A matematikai tárgyakra vonatkozó szemlélet gondolatával kapcsolatban újabb nehézséget támaszt, hogy ezek a tárgyak a szó leibnizi értelmében nem teljesek. Ezt a problémát szükségtelen itt részletezni; sokan vizsgálták már, nem utolsósorban jómagam.[16] A matematikai tárgyaknak a matematikai érvelésben szerepet játszó tulajdonságait és relációit annak a rendszernek vagy struktúrának az alapvető viszonyai határozzák meg, amelyhez mindezek a tárgyak tartoznak. Ilyen struktúra lehet a természetes számok rendszere, az euklideszi vagy valamilyen másféle tér, egy adott csoport, test vagy más hasonló struktúra, esetleg a halmazok univerzuma vagy ezeknek valamely modellje. Úgy tűnik, a matematikai tárgyaknak azok a tulajdonságai és relációi, amelyeknek megléte vagy hiánya „ténykérdés", vagy kifejezhetők valamilyen módon a struktúra alapvető relációival, vagy pedig „külső viszonyok", amelyek függetlenek attól, hogyan választjuk meg a tárgyaknak azt a rendszerét, amelyben a struktúra realizálódik.

Tekintsük például a természetes számokat a 0-val és az S

[16] [Parsons 1965]; [Parsons 1971] (különösen a 154–157. p.); [Parsons 1986]. Más szerzők írásai közül különösen figyelemreméltó [Bernays 1950] és [Benacerraf 1965].

rákövetkezőfüggvénnyel (illetve esetleg még további függvényekkel, például az összeadással, ha nem engedünk meg másodrendű eszközöket), mint vizsgálatunk tárgyát képező struktúrát. Az első relációtípust az olyan számelméleti tulajdonságok illusztrálják, mint a *prím* vagy a *négy négyzetszám összege*. A külső relációk közé tartoznak azok, amelyek más tárgyak megszámlálásakor kerülnek elő, valamint az olyan tulajdonságok, mint hogy egy szám *szerintem prím*. Az ilyen relációk még akkor sem fejezhetők ki a számelmélet nyelvében, ha magasabb rendű nyelvet választunk; viszont általában definiálhatók úgy, hogy az alapvető relációkra támaszkodunk és ezeken felül olyan tényezőkre, amelyek függetlenek attól, hogy tárgyak és relációk mely rendszerét választottuk a struktúra megvalósítására.

Kérdés mármost, hogy a matematikai szemlélet miképpen tud tárgyakat idézni „lelki szemeink elé", ha egyszer ezek a tárgyak egyenként még csak nem is azonosíthatók? Úgy tűnik például, hogy hacsak nem tételezünk fel egy, a számokat és a halmazokat is magában foglaló struktúrát, eldönthetetlen marad, hogy a 2 az egyelemű $\{\{\Lambda\}\}$ halmazzal azonos-e, vagy pedig a kételemű $\{\Lambda, \{\Lambda\}\}$ halmazzal; netán egyikkel sem.[17] Hogy lehetséges ez, ha egyszer a számok és a halmazok a matematikai szemlélet tárgyai? Válhat-e az ilyen szemlélet a matematikai megismerés érdemi forrásává, ha még az ilyen egyszerű kérdéseket is válasz nélkül hagyja?

Akár tovább is fokozhatnánk a dolgot: kiállhatnánk a matematika egy olyan értelmezésének a lehetősége mellett, amely lemond a sajátosan matematikai tárgyakról. Az egyik ilyen lehetőség a matematikai tárgyak nominalista rekonstrukciója. Ha a matematika egészét tartjuk szem előtt, ennél több reménnyel kecsegtet a kvantorok modális értelmezése. Durván fogalmazva: ebben az értelmezésben a bizonyos feltételeknek megfelelő matematikai tárgyak létezését állító kijelentéseket

[17] Az első lehetőség Zermelónak a számok halmazelméleti konstrukciójára adott javaslatából adódik, a második Neumannéból, a harmadik pedig akkor merül fel, ha a halmazelmélet a számokat individuumoknak tekinti.

úgy fogjuk fel, hogy tisztán strukturális feltételeknek megfelelő tárgyak *lehetséges* létezését állítják.[18]

Mindezek a nehézségek végső soron egyazon probléma változatai. A matematikai tárgyakat lényegében azok a relációk határozzák meg, amelyek a tárgyakat magukban foglaló struktúrákat alkotják. Eszerint nincs olyan objektív szempont, amelynek alapján valamelyik realizációt kitüntethetnénk a többivel szemben mint a tárgyak „egyedüli" szándékolt tartományát – éspedig azért, hogy elutasítsunk más konkrét (nominalista) realizációkat, amennyiben ilyenekkel is rendelkezünk. Sőt mi több: egy struktúra tényleges realizációjának nincs semmi matematikailag releváns hozadéka a pusztán lehetséges realizációkkal szemben. Mindkét ellenvetés rászorul *némi* finomításra: először is azért, mert az aktuálisan adott realizációk gyakran feltételeznek más, átfogóbb struktúrákat – ahogy a természetes számok realizációja a halmazokét –; másodszor pedig azért, mert a lehetséges totalitások tárgyalása során alkalmunk nyílik egy olyasféle különbségtételre, mint az aktuális és a potenciális létezés közötti. De ezúttal nem szükséges belemennünk abba a kérdésbe, hogy miképpen is lehet pontosan megfogalmazni ezeket az ellenérveket.

III.

Megkísérlem megmutatni, hogy ha többet nem is, de legalább egy korlátozott alkalmazást találhatunk a matematikai tárgyi szemlélet fogalmához, amely alkalmas arra, hogy megvédjük az ellene felhozott érvekkel szemben. Mindenekelőtt tekintsük át röviden, milyen megfontolások is szólnak a fogalom bevezetése mellett. A propozicionális szemlélet akkor tudja kifejteni a vonzerejét, ha a matematika elemi igazságainak nyilván-

[18] [Putnam 1967]; [Parsons 1971], 158–164. p.; továbbá [Chihara 1973], 191. p.

Segíthet eloszlathatni az absztrakt tárgyakkal szembeni fenntartásokat, ha a modális interpretációt az aritmetikára és a matematika más, még elemibb területeire alkalmazzuk. [Parsons 1986]-ban amellett érveltem, hogy a magasabb halmazelmélettel már nem ez a helyzet.

való volta kerül szóba. A matematikai igazságok dolgában két rivális nézetnek is nagy hatású képviselői voltak a 20. században. Az egyik a konvencionalizmus; e felfogás szerint a matematikai kijelentéseknek legalábbis egy része megegyezés szerint igaz. A másik felfogás az empirizmus egy változata; eszerint a matematika nem válik el a tudományoktól és az axiómák státusa olyan, mint a magasabb szintű elméleti hipotéziseké. Mindkét felfogásnak vannak kevéssé vonzó velejárói. A konvencionalizmust épp elég bírálat érte már; nincs szükség arra, hogy ezeket itt elismételjem.

Úgy tűnik, hogy az empirista felfogás – még abban a kifinomult és komplex formájában is, amit Quine professzor írásaiban öltött – kiteszi magát a következő ellenérvnek: nem ad magyarázatot az elemi matematika *nyilvánvalóságára* (sőt, esetleg a logikáéra sem). Quine empirizmusa megkísérel felülkerekedni a korábbi matematikai empirizmus problémáin azáltal, hogy a matematikát a tudomány elméleti részével veszi egyneműnek. Vannak azonban jelentős különbségek is. Ilyen mindenekelőtt a logika „témafüggetlensége", amivel Quine láthatólag számot vet az írásaiban – bár fenntartja, hogy a témafüggetlenség a logikai konstansok megválasztásán múlik, az pedig végső soron önkényes. További különbség a matematika és a logika szoros kapcsolata: a matematika lehetséges alkalmazási köre éppen olyan széles, mint a logikáé – annak ellenére, hogy a matematikai tárgyak létezése miatt a matematika nem teljesen témafüggetlen. Harmadszor: bizonyos igencsak általános alapelvek megléte, amelyeket mindenki nyilvánvalónak tekint, míg egy empirista számára ezek merész hipotézisek volnának – egy körültekintő tudós az ilyesmivel szemben fenntartásokkal él, nem tévesztvén szem elől, hogy a tapasztalat akár rájuk is cáfolhat. Végül pedig: a bevettől eltérő nézetek a logikával és az elemi matematikával kapcsolatban – ilyeneket vetettek fel az intuicionisták – kézenfekvő módon magyarázhatók *jelentésbeli* különbségekkel. Quine mindezt annak a sajátos szerepnek az alapján fogadja el, amit a logika a fordításról szóló elméletében betölt; ám ebben az elméletben a logika nyilvánvalósága a megvizsgálatlan premisszák közé tartozik.

A Quine előtti logikafelfogás szerint a logikai igazságok a logikai konstansok jelentésénél fogva igazak. E felfogás egy változata tűnik a leginkább ígéretes megoldásnak a quine-i *logika*felfogás problémáinak leküzdésére. Nincs olyan a priori szempont, amelynek alapján a szemlélet általunk vizsgált koncepciójának szerepet kellene kapnia egy ilyen logikafelfogás kidolgozásában. Az aritmetika esetében már más a helyzet, hiszen a logikával szemben ez utóbbi ontológiai elkötelezettségekkel terhelt. Nem könnyű feladat az aritmetikai vagy akár más kifejezések jelentése alapján megmutatni, hogy létezik egy olyan struktúra, mint a természetes számoké – vagy legalább annyit, hogy valamilyen matematikailag releváns értelemben *lehetséges* egy ilyen struktúra.

Ez az a pont, ahol a tárgyi szemlélet fogalma kínálkozik a megoldáshoz. Megingathatatlan ténynek tekintjük, hogy az aritmetikai igazságok egy jelentős hányadát közvetlenebb módon láttuk be, mint amilyenről az empirikus megfontolások révén nyert ismeretek esetében beszélhetünk. És ez az aritmetikai tudás bizonyos tárgyakról – a természetes számokról – szóló igazságok formáját ölti. Mi sem magától értetődőbb, mint az a feltevés, hogy az aritmetikai tudás azért közvetlen, mert a tárgyak, amelyekre vonatkozik, valamiképpen maguk is közvetlenül adottak a számunkra? Ennek a közvetlenségnek a modelljeként pedig az szolgálhat, ahogy a fizikai testek adottak a számunkra az észlelésben.

IV.

Ez a modell túlságosan leegyszerűsítettnek bizonyul, ha a természetes számokra alkalmazzuk. Ennek ellenére úgy vélem, hogy a számokról alkotott szemlélettel kapcsolatos nehézségeken felül tudunk kerekedni egy sajátos stratégia révén, amelyet Kant és Husserl sugall. Kant elgondolása szerint a tiszta szemlélet adja az érzéki szemlélet *formáját*, Husserl álláspontja szerint pedig a kategoriális szemléletet az érzéki szemlélet *alapozza meg*. Mint mondottuk, a matematikai tárgyak az észleléssel rokon módon lehetnek adottak a számunkra; ezt a viszonyt bizonyos értelemben szemléltetik azok a helyzetek, amelyekben a *szokványos* módon észleljük vagy pedig *elképzeljük* a matematikai tárgyakra jellemző struktúrák (esetenként részleges) realizációját fizikai tárgyakban.

Máshol már kifejtettem egy elgondolást az aritmetikai szemléletről.[19] Az ott elmondottak azonban szorosan kapcsolódtak a kvantorok modális értelmezéséhez, noha az alapgondolat nagyobb általánosságra tartott számot. A következőkben megpróbálom a korábbi elgondolás néhány további aspektusát is megvilágítani.

Céljainknak megfelel, ha Hilbert nyomán egy egyszerű „nyelv" „szintaxisát" vizsgáljuk meg, amelyben az egyetlen alapjel a „|" (vonal), a nyelv jólformált kifejezései pedig ebből az egy szimbólumból álló tetszőleges véges sorozatok: |, ||, |||, ... A vonalsorozatoknak ez az egymásutánja izomorf a természetes számokkal: „|" a 0-nak, az újabb vonal hozzáfűzése pedig a rákövetkezési műveletnek felel meg. Így az aritmetika sajátos interpretációjához jutunk: egyfajta vonalsorozat-geometriához. Első pillantásra ebből az értelmezésből kimarad a *szám* fogalma, vagyis az, hogy a természetes számok számosságként és rendszámként is szerepelhetnek.

Egy vonalsorozat szokványos értelemben vett észlelése egy *jelpéldány* észlelése kellene hogy legyen, de ilyen szimbólumokat magától értetődően jeltípusként gondolunk el. Ha abból indulunk ki, hogy a jelpéldányok *az egyes* vonalak, a vonalnyelv leírását úgy is átfogalmazhatjuk, hogy a típusokat nem tekintjük tárgyaknak. Két sorozat akkor tartozik „ugyanabba a típusba", ha azokat egymás mellé *lehet* illeszteni úgy, hogy a vonalak hiánytalanul párokba rendeződjenek.[20] A kritériumban szereplő modalitás nem feltétlenül lényeges. Egy aktualista nominalista például amellett érvelhetne, hogy más természetű, empirikus próba is megteszi, vagy akár induktív definícióval is előállhatna: két sorozat akkor tartozik egyazon típusba, ha mindkettő egyetlen vonalból áll, vagy ha a jobb szélső vonalak elhagyásával kapott sorozatok ugyanabba a tí-

[19] [Parsons 1971], III. fejezet.

[20] [Parsons 1971], 159–160. p. Az olvasó itt megtalálja a további részleteket.

pusba tartoznak. Nemsokára azonban sokkal erősebb kísértéssel is szembe kell néznünk a modalitások alkalmazására.

Nem újdonság, hogy a szintaxist ilyen mélységben (és valójában még sokkal mélyebben) tudjuk nominalista eszközökkel tárgyalni. Az azonban jóval kevésbé elfogadott, hogy ez az eljárás a típusokra adott magyarázat alapjául is szolgálhat. Ez a magyarázat egyrészt minden „absztraktságuk" ellenére semmivel sem mutatja a típusokat titokzatosabbnak bármely más tárgynál; másrészt pedig indokolttá teszi azt a megállapítást, hogy a típusok olyan módon *adottak* a számunkra, amely analóg azzal, ahogy a közepes léptékű fizikai tárgyak adottak a számunkra. Ezt a természetes nyelv is így tekinti, hiszen azt mondjuk, hogy *szavakat* és *mondatokat* hallunk vagy látunk, és itt egyértelműen típusokra gondolunk.

Vonalpéldányok egy sorozatának észlelése persze önmagában még nem „szemlélete" egy vonalsorozat-típusnak. Az utóbbihoz a típus *fogalmának* segítségével tudunk eljutni; ehhez pedig mindenekelőtt arra a képességre van szükség, hogy fel tudjuk ismerni más példányokról, hogy beletartoznak-e ugyanabba a típusba, vagy sem. Ezen a képességen túl is szükségünk van valamire, amit úgy írhatnánk le, hogy egy bizonyos típus*ként* látunk valamit. De ez már a szokványos észlelésben is jelen van. Láthatunk persze egy tárgyat anélkül is, hogy felismernénk benne ezt vagy azt, de ha a felismerés mégis megtörténik, az még a normális észleléshez tartozik; ha pedig valaki lát egy tárgyat, akkor mindenképpen *valamilyen* leírásnak megfelelően ismeri azt fel, amely alkalmas arra, hogy egy másik alkalommal újra beazonosítsa.

Mindezzel szemben azt az ellenvetést lehetne tenni, hogy egy tárgy szokványos észlelése egy lényeges ponton különbözik attól, amit én egy szimbólumtípus „szemléletének" szeretnék nevezni. Míg ugyanis az előbbi esetében a tárgyként – vagy akár egy adott fajtába tartozó tárgyként – való *Auffassung* [felfogás] teljességgel spontán és természetes, az utóbbi aktus egy esetleg teljességgel mesterséges fogalmi apparátus tudatos igénybevételét igényli. Egyetértek azzal, hogy ez az ellenvetés esetleg jogos lehet a vonalsorozat-típusok esetében, más esetekben pedig feltétlenül jogos. Némely esetben azonban teljesen spontán és természetes módon tekintünk valami adottat típusnak. A természetes nyelv megértése kínálja a legnyilvánvalóbb példát erre a spontaneitásra: a befogadó külön reflexió nélkül is újra fel tudja ismerni a típust (éspedig nyelvészeti, nem pedig akusztikai értelemben). A nyelvi megnyilatkozás befogadójának jellemzően világosabb elképzelése van arról, hogy *mi hangzott el* (például mely szavak), mint arról, hogy miképpen is lehetne a megnyilatkozás *eseményét* beazonosítani.[21] Azt hiszem, hogy ugyanez érvényes néhány más univerzáléra is; így például az érzéki minőségekre és a formákra.[22] Mindenesetre úgy tűnik, hogy ezen esetek egyikében sem sértjük meg a köznyelvet, ha az univerzálé *mint tárgy* észleléséről beszélünk, amikor az univerzálé egy példánya van jelen. Ez nem csupán bombasztikus megfogalmazása az egyedi példány mint példány észlelésének (például, ha látunk valami vöröset *mint* vöröset), hiszen az univerzálé beazonosítása biztosabb és világosabb lehet, mint a tárgyé, amely az univerzálét képviseli.

Ezeknek az észrevételeknek meg kellene ingatniuk azt a közkeletű benyomást, hogy a matematikai szemlélet valami „különleges" képesség, amely esetleg nem is jut szerephez, amíg nem művelünk tiszta matematikát. A matematikai természetű szemléletnek legalább egy fajtája – nevezetesen a szimbólum- és a kifejezéstípusok szemlélete – teljesen szokvá-

[21] Természetesen annak szokásos értelmét, amikor arról beszélünk, hogy mi hangzott el, és még inkább arról, hogy mit *mondott* az illető, leginkább a *kijelentés* fogalmára hivatkozva tudnánk rendszerezetten leírni. Így aztán hasonló érvet fogalmazhatnánk meg amellett is, hogy a kijelentések szemléleti tárgyak. Az ilyen érvek sem oszlatják azonban el a kijelentések objektivitásával kapcsolatos jól ismert kételyeket. Egy hangingerre adott válasz azért számíthat egy *mondat* szemléletének, mert a befogadónak tulajdoníthatunk egy kellően erős fogalmat arról, hogy mit is jelent *egyazon mondatnak* lenni.

[22] Ez a felfogás nem szükségképpen öszeegyeztethetetlen a nominalizmus összes változatával. A brit empiristák némelykor univerzálékként fogták fel az érzéki minőségeket, de ezeket csak „egyszerű ideákként", nem pedig „absztrakt ideákként" ismerték el. Hasonló értelemben univerzálék tartoznak a *qualia* körébe [Goodman 1951] felfogása szerint. Sem az empiristák, sem Goodman álláspontja, de még az általam javasolt felfogás sem követeli meg az érzéki minőségektől, hogy *attribútumok* legyenek abban az értelemben, hogy nominalizált predikátum jelölné őket.

nyos jelenség és ez a köznyelvben is kifejezésre jut. Ha egyáltalán jutunk valamire azzal, hogy pozitívan próbáljuk magyarázni a matematikai szemléletet, akkor – a matematikai szemlélet híveinek elképzelésével összhangban – annak is világossá kell válnia, hogy ez a szemlélet nem elszigetelt ismeretelméleti fogalom, amely csak a tiszta matematikára alkalmazható, hanem igen szoros kapcsolatban kell állnia azokkal a fogalmakkal, amelyekkel a fizikai világ szokványos észlelését és az arról szerzett ismereteinket írjuk le. A kapcsolatnak olyan szorosnak kell lennie, hogy ezt a „képességet" akkor is tetten érhetjük, ha tudatosan éppen nem foglalkozunk matematikával.

V.

Eddigi fejtegetéseink alapján óvatosnak kell lennünk, amikor Husserl nyomán úgy beszélünk egy típus „szemléletéről", mint ami a példány észlelésén alapul. A szokványos helyzetekben szó szerinti értelemben vett észlelésről van szó, ami megköveteli az észlelés tárgyának fizikai jelenlétét és hatását az érzékekre. Ha a szokásos értelemben mondjuk, hogy *szavakat* hallunk, ez általában ilyen következményekkel jár. A típus sokszor az ilyen esetekben is háttérbe szorítja a példányt, de az utóbbi ettől még az észlelés tárgya marad. Ám ez a háttér és a további tapasztalatok, amelyek elengedhetetlenek ahhoz, hogy valami fizikailag *valóságosat* észleljünk, még ezekben a megszokott helyzetekben is irrelevánsak abból a szempontból, hogy a típusban rögzített *formát* észleljük-e. A fizikai valóság többnyire nem akkor válik fontossá, amikor felfogjuk a típust, hanem amikor a részletekre vagyunk kíváncsiak: a szavakkal kapcsolatban feltehetőleg számítani fog, hogy valaki egy adott időpontban kimondta azokat, vagy hogy esetleg egy könyvben vannak kinyomtatva.

Az ilyen szemlélet megalapozásában paradigmatikus szerepe van a példány észlelésének vagy elképzelésének. Így tud a típus szemlélete a típusról szóló propozicionális tudáshoz, tehát *propozicionális* szemlélethez juttatni bennünket. Egyszerű példát szolgáltatnak a típusokról szóló egyedi kijelentések, mint például az, hogy ||| a ||-ra következik. Ennek igazságát egyetlen szemlélet alapján látjuk be, de a kijelentés persze általános, amennyiben a példányokra vonatkozó következményeit tekintjük. Legyen *a* a fenti ||| típus egy példánya, *b* pedig a || típusé. Ha *c* és *d* rendre ugyanabba a típusba tartoznak, mint *a* és *b*, akkor állításunk értelmében *c* két komponensre bontható: az egyik *d*-vel megegyező típusú, a másik pedig egyetlen vonallal egészíti ki ezt a jobb oldalán. Persze úgy is alátámaszthatjuk az állítást, amely szerint ||| a ||-ra következik, hogy a megfelelő típusok tetszőlegesen kiválasztott példányaira hivatkozunk, amelyek megerősítik a fenti következtetést. De az igazolás módja ebben a változatban is ugyanaz: paradigmatikusnak tekintett példákat kell megvizsgálnunk. Mindez nem csak az általunk választott fiktív elméletre igaz. Ugyanez érvényes a papíron végzett számításokra és az olyan formális bizonyításokra is, mint amilyenek a bevezető logikakurzusokon bemutatott levezetések.

Súlyosabb problémákkal kell szembenéznünk, ha *típusokról* tett általános kijelentésekről van szó, amelyek meghatározatlan sokaságú *különböző* típus fölött kvantifikálnak. Ez tart bennünket vissza attól, hogy Husserl nyomán úgy fogalmazzunk: némelykor a típus szemlélete egy *elképzelt* példányra támaszkodik. Tekintsük például azt az állítást, hogy minden egyes vonalsorozatot folytatni *lehet* egy újabb vonallal. Ez a lehető leggyengébb megfogalmazása annak, hogy „nyelvünk" potenciálisan végtelen. Efelől azonban sem tapasztalati úton nem tudunk meggyőződni, sem a matematikai szemlélet imént tárgyalt változata révén, amely tényleges észlelésen alapul. Ha azonban magunk elé képzelünk egy tetszőleges vonalsorozatot, azonnal kiderül az is, hogy ez folytatható egy újabb vonallal. A sorozatot akár *Gestalt*ként is magunk elé idézhetjük – egyidejűleg az összes vonalat –; az alakzattal együtt adott a környezete, s így az újabb vonalhoz szükséges hely is. Mégsem biztos, hogy ez a legjobb megközelítése a problémának, hiszen ha így képzelünk el egy *tetszőleges* sorozatot, homályban marad, hogy az miképpen is tagolódik vonalakra. Ehelyett úgy is elgondolhatjuk a sorozatot, hogy az lépésről lépésre épül fel a vonalakból. Ebben az esetben a hangsúly az nyos jelenség és ez a köznyelvben is kifejezésre jut. Ha egyáltalán jutunk valamire azzal, hogy pozitívan próbáljuk magyarázni a matematikai szemléletet, akkor – a matematikai szemlélet híveinek elképzelésével összhangban – annak is világossá kell válnia, hogy ez a szemlélet nem elszigetelt ismeretelméleti fogalom, amely csak a tiszta matematikára alkalmazható, hanem igen szoros kapcsolatban kell állnia azokkal a fogalmakkal, amelyekkel a fizikai világ szokványos észlelését és az arról szerzett ismereteinket írjuk le. A kapcsolatnak olyan szorosnak kell lennie, hogy ezt a „képességet" akkor is tetten érhetjük, ha tudatosan éppen nem foglalkozunk matematikával.

V.

Eddigi fejtegetéseink alapján óvatosnak kell lennünk, amikor Husserl nyomán úgy beszélünk egy típus „szemléletéről", mint ami a példány észlelésén alapul. A szokványos helyzetekben szó szerinti értelemben vett észlelésről van szó, ami megköveteli az észlelés tárgyának fizikai jelenlétét és hatását az érzékekre. Ha a szokásos értelemben mondjuk, hogy *szavakat* hallunk, ez általában ilyen következményekkel jár. A típus sokszor az ilyen esetekben is háttérbe szorítja a példányt, de az utóbbi ettől még az észlelés tárgya marad. Ám ez a háttér és a további tapasztalatok, amelyek elengedhetetlenek ahhoz, hogy valami fizikailag *valóságosat* észleljünk, még ezekben a megszokott helyzetekben is irrelevánsak abból a szempontból, hogy a típusban rögzített *formát* észleljük-e. A fizikai valóság többnyire nem akkor válik fontossá, amikor felfogjuk a típust, hanem amikor a részletekre vagyunk kíváncsiak: a szavakkal kapcsolatban feltehetőleg számítani fog, hogy valaki egy adott időpontban kimondta azokat, vagy hogy esetleg egy könyvben vannak kinyomtatva.

Az ilyen szemlélet megalapozásában paradigmatikus szerepe van a példány észlelésének vagy elképzelésének. Így tud a típus szemlélete a típusról szóló propozicionális tudáshoz, tehát *propozicionális* szemlélethez juttatni bennünket. Egyszerű példát szolgáltatnak a típusokról szóló egyedi kijelentések, mint például az, hogy ||| a ||-ra következik. Ennek igazságát egyetlen szemlélet alapján látjuk be, de a kijelentés persze általános, amennyiben a példányokra vonatkozó következményeit tekintjük. Legyen *a* a fenti ||| típus egy példánya, *b* pedig a || típusé. Ha *c* és *d* rendre ugyanabba a típusba tartoznak, mint *a* és *b*, akkor állításunk értelmében *c* két komponensre bontható: az egyik *d*-vel megegyező típusú, a másik pedig egyetlen vonallal egészíti ki ezt a jobb oldalán. Persze úgy is alátámaszthatjuk az állítást, amely szerint ||| a ||-ra következik, hogy a megfelelő típusok tetszőlegesen kiválasztott példányaira hivatkozunk, amelyek megerősítik a fenti következtetést. De az igazolás módja ebben a változatban is ugyanaz: paradigmatikusnak tekintett példákat kell megvizsgálnunk. Mindez nem csak az általunk választott fiktív elméletre igaz. Ugyanez érvényes a papíron végzett számításokra és az olyan formális bizonyításokra is, mint amilyenek a bevezető logikakurzusokon bemutatott levezetések.

Súlyosabb problémákkal kell szembenéznünk, ha *típusokról* tett általános kijelentésekről van szó, amelyek meghatározatlan sokaságú *különböző* típus fölött kvantifikálnak. Ez tart bennünket vissza attól, hogy Husserl nyomán úgy fogalmazzunk: némelykor a típus szemlélete egy *elképzelt* példányra támaszkodik. Tekintsük például azt az állítást, hogy minden egyes vonalsorozatot folytatni *lehet* egy újabb vonallal. Ez a lehető leggyengébb megfogalmazása annak, hogy „nyelvünk" potenciálisan végtelen. Efelől azonban sem tapasztalati úton nem tudunk meggyőződni, sem a matematikai szemlélet imént tárgyalt változata révén, amely tényleges észlelésen alapul. Ha azonban magunk elé képzelünk egy tetszőleges vonalsorozatot, azonnal kiderül az is, hogy ez folytatható egy újabb vonallal. A sorozatot akár *Gestalt*ként is magunk elé idézhetjük – egyidejűleg az összes vonalat –; az alakzattal együtt adott a környezete, s így az újabb vonalhoz szükséges hely is. Mégsem biztos, hogy ez a legjobb megközelítése a problémának, hiszen ha így képzelünk el egy *tetszőleges* sorozatot, homályban marad, hogy az miképpen is tagolódik vonalakra. Ehelyett úgy is elgondolhatjuk a sorozatot, hogy az lépésről lépésre épül fel a vonalakból. Ebben az esetben a hangsúly az *időbeli* egymásutániságon van, és az válik nyilvánvalóvá, hogy bármelyik ponton újabb lépésre van lehetőség.

Mindkét esetben *tetszőlegesen hosszú vonalsorozatot* kell magunk elé képzelnünk. Hasonló problémába ütközünk itt, mint Locke az általános háromszög kapcsán. Amint egy sajátos módon elképzeltük a vonalsorozatot, az máris adott számú vonalból fog állni, és így nem lesz teljesen tetszőleges sorozat. Úgy tűnik, két választásunk van: vagy *elmosódó* képet alkotunk a sorozatról – tehát nem tisztázzuk a belső szerkezetét olyan mértékben, hogy n tagú vonalsorozat jelenne meg előttünk valamely adott n-re –, vagy kiválasztunk egy adott számú vonalból álló sorozatot paradigma gyanánt (és azt ilyenkor nem csupán elképzelhetjük, de észlelhetjük is). Az utóbbi esetben képesnek kell lennünk arra, hogy eltekintsünk a belső szerkezettől, s így végső soron ugyanaz a helyzet, mint ha csak elmosódó képünk van a sorozatról.

Természetesnek vesszük, hogy az észlelésünket legalább bizonyos esetekben nem torzítja el a gondolkodásunk: tudatos reflexió nélkül be tudjuk fogadni környezetünk egyes aspektusait és válaszolni is tudunk azokra, továbbá képesek vagyunk úgy viszonyulni a saját észleléseinkhez, hogy egyáltalán ne befolyásoljon, hogyan ítélnénk meg azokat egyébként. Akár igazunk van ebben a kérdésben, akár nem, világos, hogy egy, az előző bekezdésben leírthoz hasonló *Gedankenexperiment* csak akkor fogható fel egy olyan állítás szemléleti igazolásaként, mint hogy bármely vonalsorozat folytatható, ha a kísérlet során meghatározott fogalmakra támaszkodunk; esetünkben a vonalsorozatéra. Ha ez nem így volna, a gondolatkísérlet nem tudná igazolni az állítás általános érvényét.

Brouwer talán éppen ezt a nehézséget próbálta áthidalni egy konkrét esetben azzal, hogy bevezette a kettős egység fogalmát. Brouwer koncepciója szerint a tudat működése révén „egy életpillanat két minőségileg különböző dologgá válik szét", amelyek közül az újabb jelen pillanat megőrzi az eredeti időbeliségét, s az így kapott „időbeli kettősség" felfogható egy új kettősség megfogalmazásaként, ami utat nyit az időbeli hármasságnak.[23] A folyamat így mindig el tud vezetni egy újabb pillanathoz, és Brouwer szerint éppen ezen alapul a természetes számok végtelensége. Valami hasonlóval van dolgunk az alakzat-háttér szerkezetű észlelés esetében is, amelyre fentebb hivatkoztunk. De bárhogy gondoljuk is el azt a lépést, amellyel az újabb sorozathoz eljutunk, az mindenképpen *korlátlanul iterálható* lesz. Ez bizonyos értelemben abból a tényből következik, hogy az „újabb elemmel való bővítés" után lényegében ugyanaz lesz a sorozat szerkezete. De egy olyan fogalom, mint a vonal*sorozat*, magában foglalja az ilyen jellegű iterativitást. Ha ezt érthetővé akarjuk tenni, máris a matematikai indukciót körülvevő fogalmak és elképzelések sűrűjében találjuk magunkat. És bár azt a felfogást tulajdonítják Brouwernek, hogy az iteráció a legalapvetőbb matematikai intuíció, én a magam részéről úgy vélem, hogy a szemlélet itt tárgyalt fogalma kimerül ezen a ponton, és csak egy gyengébb és kevésbé körvonalazott értelemben igaz, hogy a matematikai indukcióban a szemlélet jelenik meg.

A vonalsorozat fogalma magában foglalja ugyan az iterációt, mégsem juthatunk induktív módon arra a következtetésre, hogy minden ilyen sorozat tovább folytatható. Az induktív bizonyítás ugyanis szükségképpen körkörös volna. Csak akkor folyamodnánk ilyen bizonyításhoz, ha valóban azt kellene belátnunk, hogy minden vonalsorozatot meg lehet kapni az újabb vonallal való bővítés iterált alkalmazásával. Szerintem valójában csupán ennyiről van szó: észlelésünknek van egy sajátos szerkezete, egy „szemléleti forma", ha úgy tetszik, amelyben megvannak a brouweri kettős egység lényegi vonásai, és bárhogy is értsük az „újabb elemmel való bővítést", mindenképpen a birtokunkban van valami, aminek éppen ez a struktúrája. Ha azonban csak annyit akarunk belátni, hogy mindig *lehetséges* újabb elemmel bővíteni a sorozatot, akkor csak az általános struktúrára támaszkodunk, nem pedig arra az konkrét belátásra, hogy az előttünk fekvő sorozat iterált bővítések eredménye. Ez derül ki abból is, hogy ugyanab-

[23] [Brouwer 1975], 417. p. (1929-ből). Vö. 17. p. (1907-ből), 480. p. (1948), 510. p. (1952).

ban az értelemben, ahogy a vonalak sorozata folytatható egy újabb vonallal, bármely véges geometriai alakzat is kiegészíthető ilyen vonallal.

VI.

Fontos leszögeznünk: az előző fejezet érvei semmilyen alapot nem adnak arra a meggyőződésre, hogy *fizikailag is lehetséges* tetszőleges vonalsorozatot folytatni. Ezek az érvek legfeljebb a tér és az idő szerkezetéről mondanak valamit, de a fizikai lehetségességhez ennél többre van szükség: éspedig arra, ami a fizikai valóságot megkülönbözteti a tiszta geometriai tértől. Bármiben álljon is ez a különbség, annyi bizonyos, hogy a fizikai valóság a tér mellett anyagból is áll. Másrészt ténylegesen kevesebbre van szükségünk, mint a tiszta geometriai tér, hiszen még ha ragaszkodunk is a vonalak térbeliségéhez – ettől esetleg el lehet tekinteni –, csak a tér néhány primitív tulajdonságát használjuk ki; a metrikus tulajdonságokat például nem.

Azt a lehetségességet, amelyről ezek az érvek szólnak, *matematikai lehetségességnek* nevezhetjük. A megfogalmazás arra utal, hogy nem az emberi szervezet képességeire gondolunk, sőt akár még az is idegen lehet a megfontolásainktól, hogy a „konstrukciót" az *értelem* tevékenységeként fogjuk fel. Az utóbbi értelmezés egyébként egybeesik Kant és Brouwer álláspontjával. Ez akkor válik igazán vonzóvá, ha azt szeretnénk állítani, hogy bármely vonalsorozat *észlelhető* vagy *elképzelhető*. (Érdemes ezeket a kifejezéseket a példányok számára fenntartani, a típusról pedig azt mondhatjuk, hogy *szemlélhető*.) Eszerint az elképzelés szerint bármilyen sokszor ismételtük is meg a sorozat bővítését egy újabb vonallal, még mindig módunkban áll („nekünk") egy továbbival kiegészíteni. Én azonban a magam részéről úgy gondolom, hogy e mögött az álláspont mögött ott rejlik egy előfeltevés: eszerint a tapasztalatok időbeli lezáratlanságán és a tér szerkezetének néhány primitív vonásán túl semmi sem korlátoz „bennünket" abban, hogy mit vagyunk képesek észlelni. Kant és Brouwer szerint ez a két korlátozás az értelmünk hozzájárulása ahhoz, ahogy a világot észleljük. Kant természetesen úgy gondolta, hogy ezekről a dolgokról nem is lehetne a priori ismeretünk az értelem hozzájárulása nélkül. Engem nem győz meg Kant okfejtése, és semmiképp sem szeretném, ha érvelésem az a priori tudás fogalmára támaszkodna. Ha a kérdéses kijelentés *tartalmát* úgy fogalmazzuk meg, hogy az a lehető leginkább független maradjon a hozzá vezető belátás leírásától, akkor csupán annyi marad meg, hogy tetszőleges vonalsorozat esetében lehetséges egy másik sorozat, amely egy újabb vonallal egészíti ki azt.

A nominalista egyrészt többet, másrészt kevesebbet követel meg nálunk. Ő akár anélkül is megpróbálhat boldogulni, hogy a fentebb tárgyalthoz hasonló sorozatok potenciálisan végtelen voltát feltételezné; ezzel azonban a végtelen sok természetes szám igényéről is le kell mondania. A nominalista ugyanabban a kínos helyzetben van, amelyben Russell találta magát a végtelenségi axióma kapcsán. Kezelheti ugyan hipotézisként, amelynek az igazsága mellett nem kötelezi el magát, de az így felfogott matematikában súlyos problémák lépnek fel. Nem lehet ugyanis kizárni azt, hogy amennyiben a bevett matematikai eszközökkel bebizonyítottunk valamely B állítást, ez még nem jogosít fel bennünket negációjának elvetésére, hiszen ha A az idevágó végtelenségi axióma, A hamissága esetén mind $A \supset B$, mind $A \supset \sim B$ igaz.

Megteheti azt is, hogy empirikus hipotézisként fogadjon el egy olyan állítást, amelyből következik, hogy térben és időben létezik olyan ω-sorozat, mint a vonalsorozatok példányaié, amelyben minden egyes sorozat egy újabb elemmel haladja meg a megelőzőt.[24] Mivel fizikai értelemben vett létezésről van szó, ez az állítás erősebb annál, amit mi tettünk, s amire a matematikában ténylegesen szükség van. (Akár hagyományos értelemben vett empirista álláspontra is helyezkedhetett volna, amely szerint a jelenségek valamely területén fel

[24] Ilyen következménnyel jár például az a felfogás, amellyel Hartry Field figyelemre méltó könyvében ([Field 1980]) találkozunk. Field arra tett kísérletet, hogy a fizikát a szintetikus geometria kiterjesztéseként értelmezze, amelyben a változók értékei az általa fizikainak mondott téridő pontjai és ponthalmazai lehetnek. Ebben az elméletben természetesen lehet az aritmetikához modellt szerkeszteni.

is ismerhetünk ilyen sorozatokat; ez az álláspont azonban éppen empirista megfontolások alapján tűnik igencsak megkérdőjelezhetőnek, és a matematika szempontjából ugyanúgy szükségtelen követelményeket támaszt.) Egy ilyen hipotézis nyilvánvalóan elméleti jellegű, és még meg is cáfolható, amennyiben a fizika fejlődése olyan fordulatot vesz, hogy a téridőt végesnek és diszkrétnek tekintjük. A hipotézis elfogadására nincs más okunk, mint hogy a fizika történetesen a végtelen számhalmazon értelmezett aritmetikával karöltve fejlődött ki.

Van egy harmadik nominalistának mondható lehetőség is, amelyre korábban már utaltunk. Kitartunk amellett, hogy szigorú értelemben csak példányokról beszélhetünk: az *egy típushoz tartozás* relációját értelmezhetjük ugyan, de nem lesz több egy hasznos ekvivalenciarelációnál, és alkalmatlan arra, hogy a típusok beazonosításának alapjául szolgáljon. A potenciálisan végtelen számú típus problémáját pedig a kvantorok modális interpretációja útján kezeljük.[25] Korábban amellett érveltem, hogy ezt az elképzelést helytelen nominalistának nevezni.[26] Az érveimet fenntartom ugyan, de ma már inkább úgy fogalmaznék, hogy végül is terminológiai kérdés, nominalizmus-e ez a nézet. Mindaddig, amíg kívül maradunk a halmazelméleten és a matematika többi impredikatív területén, nincs lényeges különbség ezen álláspont és az én felfogásom között. Az utóbbi megkötés azonban lényeges. Ha a példányokra vonatkozó modális elméletet fizikai példányok-

[25] [Chihara 1973], 191. p.; [Parsons 1971], 160–162. p. Az utóbbi tanulmány 160. oldalának utolsó két sora többértelmű. Az egyik olvasata szerint „$\exists x Fx$" – ahol a változó „lehetséges értékei" a természetes számok – *akkor és csak akkor igaz,* ha szerkeszthetünk olyan észlelhető betűsorozatot, amelyet az Fa betűsorozat helyére írva igaz kijelentést kapunk. Ennek az igazságfeltételnek a helyes megfogalmazása egy betűsorozatokról szóló szükségszerű állítás volna. Ez behelyettesítéses jellegű igazságfeltétel, és így az aritmetika nyelvének behelyettesítéses interpretációjához vezet. Betűsorozatokról és azok készítéséről ennélfogva csak a metanyelvben beszélhetünk.

Lehetségesek más olvasatok is, amelyek szerint betűsorozatok felett kvantifikálunk.

[26] [Parsons 1971], 162–164. p.

ról szóló elméletként értjük, a modalitást pedig fizikai modalitásként fogjuk fel, akkor nézetem szerint ugyanazokkal a nehézségekkel találjuk magunkat szemközt, mint a nominalizmus aktualista változatai.

VII.

A típusok absztrakt entitások: időtlenek, kívül állnak az oksági viszonyokon és nem teljesek. A következőkben azzal a kérdéssel fogok foglalkozni, hogy e három tulajdonság kapcsán nem merülnek-e fel súlyos ellenérvek a típusok szemléletével szemben. A vonalsorozat-típusok és más hasonló jelsorozatok csak minimális mértékben absztraktak, lévén konkrét példányok típusai. Az ezekre vonatkozó szemléleteink vagy érzéki tapasztalaton alapulnak, vagy pedig olyan képzeleti aktusokon, amelyek térben és időben helyezik el a tárgyukat, még ha nem is konkrét helyen és időpontban. Az ilyen típus időtlensége egyszerű univerzalitás: mivel bárhol elhelyezhetők a példányai, magára a típusra úgy tekintünk, mint aminek magának nincs helye. Minthogy a típus léte a példány lehetségességén múlik, az előbbit nem tekinthetjük egyszerűen a példányok mereológiai összegének. Az időtlenség *problémája* valójában episztemológiai: hogyan tudhatjuk meg az igazságot a típusokról a példányok észlelése alapján, ha ezek az igazságok az adott típus *bármely* példányára érvényesek? Fentebbi megállapításaimban alig tettem többet, mint hogy megpróbáltam egyértelművé tenni: *ténylegesen* rendelkezünk ilyen tudással. További magyarázatra volna szükség, bár bizonyos tapasztalatok arra mutatnak, hogy az ilyen magyarázatok végső soron mindig körkörösek. Annyit azonban megállapíthatunk, hogy ezt a problémát nem egy sajátos típusontológia veti fel. Az említett nominalista színezetű elképzelések esetében is felvetődik a példányokkal kapcsolatos általános igazságok kérdése; ezek a típusokkal kapcsolatos igazságok nominalista változatai.

Végső soron az is megkérdőjelezhető, hogy a típusok kívül állnak-e az oksági viszonyokon. Példának okáért előfordulhatna, hogy ilyesmit mondjak: „a szavai felháborítottak". Mondjuk ezt vágta a fejemhez: „nincs joga hozzá, hogy filozófusnak nevezze magát". Valójában azonban nem gondoljuk azt, hogy maga a *mondat* háborított fel (és nem is csak a konkrét példa indexikussága miatt). Még csak nem is a mondat által kifejezett állításnak tulajdonítjuk a hatást, bár ebben az esetben ez már meggyőzőbben hangzik. Sokkal kézenfekvőbb, hogy egy eseménynek, a szavak kimondásának tulajdonítsuk a hatást, vagy annak, hogy ezt az állítást fogalmazta meg az adott helyzetben. Ha így fogjuk fel a dolgot, a mondat maga továbbra is kívül marad az oksági viszonyokon, de ez a kívül maradás nem jelent többet, mint az idő és a tér esetében. A mondat példányai részt vesznek az oksági viszonyokban, és ténylegesen hatnak az érzékelésünkre. Úgy vélem, amint átlátjuk a típus szemlélete és az észlelés szokványos formái közötti kapcsolatot, a probléma egyszeriben feloldódik. Mindazonáltal aki az ellenvetést tette, gondolhat Benacerraf dilemmájára is (lásd 15. jegyzet). Erre választ adni azonban már többet kívánna, mint amit a jelen írás elbír.

Ami pedig a teljességet illeti: első végiggondolásra akár úgy is találhatnánk, hogy a vonalsorozatokhoz hasonló absztrakt tárgyak a konkrét tárgyakkal való rokonságuk miatt *nem* hiányosak. Az az állítás például egészen egyszerűen hamis lenne, hogy ||| azonos egy más módon megadott tárggyal, mondjuk a 3 számmal. |||-nak vannak olyan tulajdonságai, amelyeket hiába keresnénk a 3-ban – például vonalakból áll. További problémát okoznak a kognitív viszonyok, közöttük a *de re* kijelentésattitűdök. Hiába látom a táblán a '$\forall x(x \neq 0 \supset \exists y(x = Sy))$' formulát, nem látom azt a számot, amely hozzárendelődik az elsőrendű aritmetika szintaxisának valamely aritmetizálása során.

A következő magyarázatot szeretném javasolni. A típus fogalmának lényegi jegyei csak az adott szimbólumrendszerhez tartozó típusokhoz képest határozzák meg az azonossági és a különbözőségi relációt. (Két konkrét betűsorozat egyazon típusba tartozhat az egyik szimbólumrendszerben, míg egy másikban nem.) Mivel ez a típusok megkülönböztető jegye, a józan ész azt sugallja, hogy egy adott szimbolika típusait *sui ge-*

neris típusoként fogjuk fel: semelyikük sem azonos egyetlen más módon adott dologgal sem. Így bizonyos értelemben meg is szűnnek hiányosnak lenni, hiszen ez a megszorítás bármely predikátum esetében meghatározza, hogy a típus kielégíti-e vagy sem (legalábbis ami a klasszikus logikát illeti). Csakhogy ezt negatív módon teszi: a típus egyetlen atomi predikátumot sem elégít ki azok kivételével, amelyek a szerkezetét adják meg és amelyek az egyes példányok alapvető tulajdonságait írják le. De a józan ész ilyen sugallatának semmi sem felel meg a dolgok természetében – legalábbis semmi olyan, amit a nyelv rendszerbe foglalása során ne lehet félretenni.

Az ilyen megfontolások mindazonáltal rámutatnak egy fontos részletre, ahol nem teljes az analógia a matematikai szemlélet itt tárgyalt típusa és a szokványos észlelés között. Az, hogy *mi a szemlélet tárgya*, attól függ, hogy a szubjektum milyen fogalmat hív segítségül a szemléletalkotáskor. Bizonyos esetekben – ilyen a természetes nyelvé is – a szerepet játszó fogalmak velünk születettek vagy spontán módon és reflektálatlanul kialakultak is lehetnek. Az olyan, jellegzetesebben matematikai szemléletek esetében, mint a geometriai alakzatoké vagy az olyasféle mesterséges szimbolikáké, mint a fentebb tárgyalt, nem ez a helyzet. Így aztán – a szokványos észleléstől eltérően – hiányzik az a fogalomkészletünktől függetlenül adott keret, amelyen belül maradva a szemlélet tárgyát beazonosíthatnánk. Ha valaki meleget érez, és a meleg nem más, mint a molekulák mozgása, akkor ő érzékel valamit, ami a molekulák mozgása. Ha az „érez" igét tárgyra vonatkoztatva használjuk, akkor a molekulák mozgását érzékeli, még akkor is, ha nincs fogalma a molekulákról. De senki sem alkothatna szemléletet egy vonalsorozat-típusról, hacsak nem látja azt olyan típus*ként*, amely vonalakból épül fel, ez pedig feltételezi a vonal fogalmát. Ha elméletünk rendszerezése során a sorozatot a 3 számmal azonosítjuk, talán azt is mondhatjuk, hogy az illető a 3-ról alkot szemléletet, noha esetleg fogalma sincs arról, hogy éppen ezt teszi. De ezt is csak azért mondhatjuk, mert rendelkezik *valamilyen* beazonosító fogalommal. Valószínűleg van egy olyan szokványos észlelésfogalom, amelyre ugyanez áll, de nem egyértelmű, hogy vajon áll-e a 'lát', a 'hall' és esetleg az 'érez' igék leginkább szokványos, tárgyra vonatkozó használatára.[27]

VIII.

Eddigi vizsgálódásunk komoly pozitív eredménnyel zárult: minden további nélkül elfogadhatjuk, hogy az észlelhető példányok típusai a szemlélet tárgyai; a szemlélet itt alkalmazott fogalma szoros analógiában áll az észlelésével. Mi több, példát is tudunk adni olyan kijelentésekre ezekről a tárgyakról, amelyeket szemléleti alapon tudunk.

Ez az eredmény csak egy nagyon szűk körre érvényes. A vonalsorozatok – annak ellenére, hogy az aritmetika egyik modelljét alkotják – felettébb sajátos tárgyak. Az, amit típusok szemléletének mondtunk, hasonló jellegű az észleléshez; ezt akár a példányként szereplő tárgyak észlelésével való rokonságnak is betudhatjuk. A matematikai szemléletről alkotott fogalmunk talán nem is visz messzebb, mint az elemi szintaxis és esetleg a hagyományos geometria területe. Fel vagyunk-e készülve például arra, hogy a *természetes számokat* a szemlélet tárgyának mondjuk?

Ennek a kérdésnek a tárgyalását rövidebbre kell fognom, mint szeretném. Eddigi fejtegetéseink mértékletességre intenek: a szemlélet olyan tárgyakat tud felmutatni, amelyek az aritmetika modelljéül szolgálhatnak és egy ilyen modell pontosan annyira felel meg, mint bármelyik másik, mind az aritmetika megalapozásához, mind annak alkalmazásaihoz. Az az állítás akár tévesnek is bizonyulhat, hogy *a* természetes számok maguk is a szemlélet tárgyai, hiszen a szemlélet számára nem egyetlen sorozat adott, amely „a" természetes számokkal

[27] A természetes nyelv esetében a nyelv határozza meg a típusok szerinti osztályozást, nem pedig az észlelő fogalmi apparátusa. Tegyük fel, hogy megkérdezek valakit, aki sosem hallott még magyar beszédet: „Hol az amerikai nagykövetség?" Az illető hallja ezt a magyar mondatot, de nem képes felismerni benne a magyar mondatot, és nem képes arra, hogy ráismerjen a mondatra, ha másvalaki az enyémtől eltérő akcentussal mondja ki. Ez a helyzet analóg azzal, amit a természeti fajták játszanak annak a leírásában, amit egy ember lát.

volna azonos, és a szám fogalma sem zárja ki, hogy az aritmetika „szándékolt modelljének" objektumai ne szemléleti tárgyak legyenek.

Meg kell azonban kísérelnünk, hátha a számosság és a rendszám fogalmának magasabb rendű aspektusaival dűlőre tudunk jutni. A következőben a számosságra fogok szorítkozni. A számállítások formalizálásakor legalább egy predikátumokon értelmezett funktort kell alkalmaznunk. Ez lehet numerikus kvantor: „n olyan x van, amelyre Fx"; de lehet névfunktor is: „az olyan x-ek száma, amelyekre Fx". Ez azonban semmilyen korlátozást nem jelent abban, hogy miféle tárgyak is a természetes számok. Ne engedjünk a kísértésnek, hogy a számokat a numerikus kvantorokkal azonosítsuk (mint „másodfokú fogalmakkal", vagy ilyesmi), de annak sem – aminek Frege nem állt ellen –, hogy keressünk egy olyan tárgyat, amely lényegi sajátosságaival reprezentálja a numerikus kvantort.

Az már nem intézhető el ilyen könnyen, hogy a számállítások igazságfeltételeinek kétségkívül magukban kell foglalniuk a számazonosság fregei kritériumát: az F-ek száma akkor és csak akkor ugyanaz, mint a G-k száma, ha *létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés* az F-ek és a G-k között.

Megpróbálhatnánk ezt olyan módon tekintetbe venni, hogy a számokat, mint valamiféle általánosított típusokat értelmezzük szemléleti tárgyakként, és ezeknek a típusoknak a példányai számlálásra szolgáló számjelpéldányok.[28] Az egy típusba tartozás relációjának szerepét itt az „ugyanazt a számot képviseli" reláció játssza. Mivel ez a reláció ugyanazt foglalja magában, amit a *számlálás*, megállapíthatjuk: amennyiben számlálással ellenőrizük, hogy n darab x van, amelyre Fx, ezzel egyben felmutatunk egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést az F-ek és n darab „számláló" sorozata között – az utóbbiak rendszerint számjelek. Ha az F predikátum elég egyszerű és a terjedelmét észlelhető tárgyak alkotják, az „n darab F van" állítást tapasztalatilag igazolhatjuk. Nem kell úgy tekintenünk az állításra, mint ami arról *szól*, hogy *létezik* kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az F-ek és a számlálók között. De ez bizo-

[28] [Parsons 1965], 201. p., vö. [Parsons 1971], 160. p.

nyos módon következik belőle, és ha a számfogalom alapjait szeretnénk lerakni, akkor az ilyen megfeleltetéseket is számításba kell vennünk.

Mindamellett az aritmetikához csak véges megfeleltetésekre van szükségünk. Élni fogok azzal a feltevéssel, hogy a szemlélet tárgyainak *véges halmaza* maga is a szemlélet tárgya. Nincs helyem itt ezt a feltevést alátámasztani. Csak annyit szeretnék jelezni: a feltevésből következik mindaz, amire szükségünk van annak igazolásához, hogy a természetes számok – amennyiben úgy fogjuk fel ezeket, mint amik szemléleti tárgyakat „számolnak meg" – maguk is szemléleti tárgyak. Az *a* és *b* számjelek, még ha más és más szimbólumrendszerhez tartoznak is, akkor képviselik ugyanazt a számot, ha a számjelek *a*-val záruló sorozata kölcsönösen megfeleltethető a *b*-vel záruló sorozatnak. Feltevésünk értelmében ez az állítás nem szól semmi másról, mint szemléleti tárgyakról.

Ez a gondolatmenet viszont azt sugallja, hogy az aritmetika, amennyiben tárgyakra *általánosságban* alkalmazzuk, a halmazelmélethez tartozik. Ebben az összefüggésben még mindig kitarthatnánk amellett, hogy a véges számok szemléleti tárgyak; emellett szól az, hogy a számok mint tárgyak felépítéséhez ez a teljes általánosság nem szükséges. A számosságokkal és a rendszámokkal kapcsolatos általános elvek azonban, ha tetszőleges halmazokra vonatkoztatjuk azokat – vagy akár tetszőleges (nem hereditáriusan) véges halmazokra –, nem jellemezhetők szemléletre alapozott tudásként; kivéve, ha az általában vett halmazok is szemléleti tárgyak. Nem is próbáltam meg amellett érvelni, hogy azok volnának.

Mielőtt a tanulmány végére érnénk, mondanunk kell valamit a matematikai indukcióról, amely már a vonalsorozatok esetében is felmerül. Nem vesztegettem sok szót arra, hogy miképpen fogunk fel egy tetszőleges vonalsorozatot vagy egy tetszőleges természetes számot. De bárhogy fogjuk is fel ezeket, ebből bizonyosan következnie kell az idevágó indukciós elvnek. Milyen kihatásai vannak ennek a ténynek a szemlélettel kapcsolatos megállapításainkra?

Koncentráljunk a vonalsorozatokra, lévén ez a szemléletesebb eset. A vonalsorozatok esetében egy indukciós következtetés konklúziója szemléleti tárgyakról tett általános állítás. Ebből még nem következik, hogy ennélfogva szemléletre alapozott tudás is volna. Nagy a kísértés, hogy szemléletnek mondjuk azt, ahogy a vonalsorozat általános fogalmát felfogjuk, hiszen ez a megértés tiszta és úgy tűnik, hogy evidenssé teszi az indukciós következtetéseket.[29] Ez azonban a *szemlélet* szónak egy újabb, a mostani összefüggésben igen félreérthető jelentése volna. Itt ugyanis egy általános fogalom megértéséről van szó, s az nem ad meg semmilyen *tárgyat*.[30]

Mivel az általános fogalom megértése ilyen lényegi szerephez jut az indukciós következtetésekben, hajlok arra, hogy még a legegyszerűbb induktív konklúziókkal kapcsolatban sincs szó szemléletre alapozott tudásról. Gödel azonban az enyémtől különböző kritériumra támaszkodott, amikor a szemléleti és az absztrakt evidencia közöti különbséget tárgyalta.[31] Ő ott húzta meg a határvonalat, ahol az ember elkezd állításokra és bizonyításokra hivatkozni: ezeket ő „absztrakt tárgyaknak" nevezte.[32] Nem kétlem, hogy ez is fontos megkülönböztetés. Még azt sem állítom, hogy a tanulmányomban sikerült kimutatnom a gödeli terminológia helytelenségét. Sokkal többet kellene elmondani a szemlélet fogalmának ismeretelméleti vonatkozásairól, mint amit ebben a tanulmányban elmondtam – még ha olyan korlátozásokkal tárgyaljuk is, ahogy most tettem.

Fordította Mekis Péter

[29] Dummett ilyen javaslatot vet fel a természetes számok esetében – de csak azért, hogy bírálhassa – *Platonism* című írásában. [Dummett 1978], 202–214. p.

[30] Természetesen vannak olyan vonalsorozatok, amelyekről gyakorlati okokból sohasem alkothatunk szemléletet, és ezeket a tárgyakat csak a vonalsorozat általános fogalma segítségével gondolhatjuk el. De 10^{100} vonal sorozatának gondolata, bármilyen világos is, nem értelmezhető az ilyen sorozatokról alkotott szemléletként.

[31] [Gödel 1958], 280–282. p. A 10. jegyzetben hivatkozott angol fordítás az „anschauliche Erkenntniss"-t (*szemléleti ismeret*) „immediate concrete knowledge"-ként (*közvetlen konkrét ismeret*) adja vissza.

[32] Véleményem szerint a szemantikai reflexió a döntő az absztraktság kérdésében. Lásd [Parsons 1971], 165–167. p.