COLIN MCLARTY

MIÉRT NE LEHETNÉNEK A SZÁMOK AZOK, AMIKNEK LENNIÜK KELL?*[x]

[Benacerraf 1965] főszereplője két logikus-csemete, aki a Zermelo–Fraenkel- (*ZF*-) halmazelmélet keretei között sajátítja el az aritmetika alapjait. Mindketten azt tanulják, hogy a számok halmazok, ismereteik között mindössze abban van eltérés, hogy *mely* halmazokat feleltetik meg a számoknak. Ernienek azt tanítják, hogy valamennyi szám a nála kisebb számok halmaza; 0 így az üres, 4 pedig a $\{0,1,2,3\}$ halmaz. Johnny ezzel szemben úgy tudja, hogy minden szám az a halmaz, amelynek egyetlen eleme az őt közvetlenül megelőző szám. A 0 e felfogás szerint is az üres halmaz, a 4 viszont most $\{3\}$. A különbségnek az aritmetikai összefüggések szempontjából semmi jelentősége nincs, Benacerraf tehát érvelhet amellett, hogy mindkét fiú egyforma joggal állítja: tudja, hogy mik a számok. Ha azonban egymásnak ellentmondó nézőpontok egyformán igazak, akkor egyik sem az. A gondolatmenet könnyedén általánosítható, végeredményben arra a következtetésre jutunk, hogy azok az elméletek, amelyek a számokat bizonyos halmazokkal azonosítják, egytől egyig elhibázottak. A számok nem lehetnek halmazok.

Benacerraf progressziónak nevez minden halmazt, amely a természetes számok struktúrájával rendelkezik (vagyis kielégíti a másodrendű Peano-aritmetika axiómáit). Állítása szerint az aritmetika „az a tudomány, amely a progresszióknak azt

*Első megjelenése: Numbers Can Be Just What They Have To. *Noûs* 27 (1993), 487–496. p. A fordítást a szerző és a Blackwell Publishing Co. szíves engedélyével közöljük, ©1993.

[x]Több gondolat John Mayberrytől való, másokat ő provokált ki. Értékes megjegyzéseikért köszönettel tartozom Helen Lauernek, Michael Resniknek és Stewart Shapirónak. Az összegeket illetően Tasha Dixon, a tízig való számolás tekintetében Brittany Dixon igazított el.

az absztrakt struktúráját vizsgálja, amely azért közös bennük, mert mindannyian progressziók" ([Benacerraf 1965], lásd jelen kötetben 192. p.). A *ZF*-beli halmazprogressziók elemeinek azonban olyan megkülönböztető jegyei is vannak, amelyek az aritmetika szempontjából irrelevánsak, minek következtében *nem lehetnek* az aritmetika objektumai, nem lehetnek tehát számok.

Benacerraf szerint az *absztrakt struktúrák* elméletét *ZF*-keretek között kellene kidolgozni (uo.). Ezek az absztrakt struktúrák mindazonáltal nem lehetnek halmazok. Amikor a természetes számokról mint absztrakt struktúráról beszélünk, az csupán *façon de parler*, valójában azokról a vonásokról van szó, amelyek valamennyi progressziót egyaránt jellemeznek. Ennek mintájára beszélhetünk a valós számok struktúrájáról, de tetszőleges más struktúráról is. Az alapgondolat, amely *strukturalizmus* néven vonult be a köztudatba, széles körű népszerűségre tett szert, részleteit illetően azonban problematikus maradt. (Lásd ehhez [Hellman 1989], [Parsons 1990], [Resnik 1981], [Resnik 1982], [Shapiro 1983].) Létezik azonban egy másik nézőpont is, amely szerint az absztrakt struktúrák ténylegesen alapvetőek, de nem is olyan bonyolultak, s amely nézőpont szerint a *ZF*-halmazok irreleváns jegyei csupán könnyedén kiküszöbölhető technikai bonyodalmak. A strukturalista program tulajdonképpen már megvalósult, ha úgy tetszik, meg se kellett volna hirdetni, a kategoriális halmazelmélet – amelyet elsőként [Lawvere 1964] vázolt fel – ugyanis tökéletesen eleget tesz ezeknek követelményeknek. Ebben az elméletben a halmazok és a függvények kizárólag strukturális tulajdonságokkal rendelkeznek. Az absztrakt struktúrák egy újabb elméletét kidolgozni szükségtelen, mi több, értelmetlen is.

Példának okáért a kategoriális halmazelmélet *természetesszám-objektumai*, a másodrendű Peano-axiómák absztrakt modelljei tökéletesen megfelelnek a progresszióknak. A többes szám indokolt, bizonyítható ugyanis, hogy végtelen sok ilyen objektum létezik, amelyek azonban mind izomorfak egymással. A *ZF*-elmélet megfelelő objektumaival összevetve a döntő különbség az, hogy a természetesszám-objektumok *mindegyike* *pontosan ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik.* Ha a progressziókat így definiáljuk, akkor kizárólag olyan vonásaik lesznek, amelyek valamennyiükben közösek. A kategoriális halmazelmélet tehát eleget tesz annak, amit Benacerraf követel a matematika strukturalista felfogásától.

A mondottakat alátámasztandó az alábbiakban bemutatom a kategoriális halmazelméletnek, pontosabban a halmazok toposzának egy – részleges – axiomatizálását. Axiómáink elégségesek lesznek az elemi aritmetika alapvető eredményeinek bizonyításához. Bárki, aki a halmazok toposzával már találkozott, azonnal látni fogja, hogy állításaink mind általános érvényűek. Aki az elmélet részleteivel alaposabban is meg akar ismerkedni, annak [McLarty 1992]-t ajánlom figyelmébe. Követni fogom Benacerraf cikkének „didaktikus" elemeit is, hogy szembeszállhassak [Feferman 1977] és [Mayberry 1977] következtetésével, mely szerint a kategóriaelméleti megközelítés puszta formalizmus, és mint ilyen tökéletesen értelmetlen – hacsak nem adjuk meg az interpretációját valamelyik „igazi" halmazelmélet keretein belül. Remélem, kiderül majd, hogy a véges halmazok és az aritmetika ugyanolyan egyszerűen állnak elő a kategorikus halmazelméletben, mint *ZF*-ben.

Még egy előzetes megjegyzés. A következőkben az A és a B halmazok közötti *izomorfizmusnak* nevezünk minden olyan $f : A \supset B$ függvényt, amelyhez megadható olyan $f^{-1} : B \to A$ inverz függvény, amellyel az $f^{-1} \circ f$ összetett függvény az A, $f \circ f^{-1}$ pedig a B halmaz identikus leképezése. Könnyű belátni, hogy e kikötésnek pontosan a bijektív („kölcsönösen egyértelmű") függvények tesznek eleget. A matematikában ez a definíció teljesen szokványos: csoportizomorfizmusok például azok a homomorfizmusok, amelyeknek az inverze is homomorfizmus, topologikus terek izomorfizmusai azok a folytonos függvények, amelyeknek az inverze is az (ami a kölcsönös egyértelműségnél erősebb követelmény). A klasszikus halmazelmélet művelői nemigen beszélnek halmazok közötti izomorfizmusról semmilyen értelemben, semmi sem szól tehát az általunk követett gyakorlat ellen.[1]

[1] Akik a *ZF* halmazelméletben dolgoznak, az *izomorfizmus* kifejezést álta-

Képzeljünk el két nővért, Tashát és Brittanyt, akiknek szüleik a legteljesebb logikai szigorral tanítják az aritmetikát. Tasha néhány évvel idősebb, az ő oktatása így előbb kezdődik, méghozzá egy szélsőséges finitizmus keretei között. Tasha először tízig tanult számolni. Amellett, hogy belérögzült, hogyan kell egytől tízig felsorolni a számokat, azt is elsajátította, miként lehet tíz tehenet, dobozt vagy a tíz ujját megszámolni. A számolást százig, majd ezerig is megtanulta folytatni, de nem volt olyan telhetetlen, hogy afelől érdeklődjön, van-e még tovább is.

Már e kezdeti fázisban megismerkedett a halmaz fogalmával. Szülei felhívták a figyelmét arra, hogy a négy gyermek, aki együtt játszott az udvarban, akkor is négy gyerek marad, amikor mind hazamennek, s már nincsenek együtt. Létezik egy *halmaz*, amelyet pontosan ezek a gyerekek alkotnak, s ennek a halmaznak akkor is négy *eleme* van, amikor ezek az elemek nincsenek egy helyen. Más szóval egy halmaz elemeinek azon kívül, hogy az illető halmaz elemei, nincs szükségük más egyesítő tulajdonságra.

Tasha megtanulta, miként lehet összeadni különféle dolgok halmazait. Ha az ő könyvei egy kilenc-, Brittany könyvei pedig egy hételemű halmazt alkotnak, akkor van egy tizenhatelemű halmaz, amelynek elemei azok a könyvek, amelyek a két nővér egyikének vagy másikának a tulajdonát képezik. Megjegyzendő e helyütt, hogy a lányok nem állhatták a bizonytalan tulajdonviszonyt, miként a közös birtoklást sem. Tasha a halmazok szorzását is elsajátította: ha T az ő, B pedig Brittany könyveinek a halmazát jelöli, akkor $T \times B$ az a halmaz, amely azokból a $\langle t, b\rangle$ rendezett párokból áll, amelyekben t Tasha, b pedig Brittany valamelyik könyve. Az elemeket megszámlálva arra

lában csak a rendezett halmazok és a modellstruktúrák vonatkozásában használják: rendezett halmazok között izomorfizmusok azok a rendezéstartó leképezések, amelyeknek az inverze is megtartja a rendezést; két modell pedig akkor izomorf, ha megadható közöttük olyan struktúratartó leképezés, amelynek az inverze is ilyen.

jutott, hogy a $T \times B$ halmaznak pontosan hatvanhárom eleme van.

Tasha munkafüzete a tíz plusz tízig való összeadást diszjunkt halmazok unióival szemléltette. Ezeknek mind utánaszámolt, s az eredményeket tényként rögzítette emlékezetében. Ugyanígy járt el a szorzatokkal is tízszer tízig. A példák kacsák vagy strandlabdák halmazait mutatták, de lehetett szó bármely halmazról, Tasha tudta, hogy nem függenek az elemek egyedi tulajdonságaitól. Még akkor is meg tudta számlálni, hány elemből áll egy halmaz, ha annyira hunyorított, hogy már azt sem tudta megmondani, mifélék is az elemei.

Tasha ezt követően megtanulta, miként adható meg egy függvény. A finitizmus szigorú követelményei szerint azt tanították neki, hogy egy, az A halmazt a B halmazba képező f függvény nem más, mint tetszőleges olyan szabály, amely az A halmaz minden egyes x eleméhez hozzárendeli a B halmaz egy $f(x)$ elemét. Ha A az utcájukban lakó gyerekek, B pedig az utca épületeinek halmaza, akkor van egy olyan A-n értelmezett, B-be érkező függvény, amely az A minden x eleméhez azt az $f(x)$ házat rendeli, amelyben x lakik. Számtalan további példa is elképzelhető.

Tasha megtanulta, hogy minden A halmaznak létezik az identikus leképezése, amelyet 1_A jelöl, s amelyre teljesül, hogy tetszőleges A-beli x esetén $1_A(x) = x$. S azt is, hogy amennyiben a C halmaznak csupán egyetlen eleme van, akkor minden halmazon pontosan egy C-be érkező függvény értelmezhető. Azt is megmutatták neki, hogy bármely $T \times B$ szorzat esetén van egy, a szorzathalmazon értelmezett, T-be képező p_1 függvény, amelyre tetszőleges $\langle t, b \rangle$ pár esetén fennáll $p_1(\langle t, b \rangle) = t$, s hasonlóan értelmezhető a B-be képező p_2 függvény. Végül megtanulta, hogy amennyiben f az A halmazt B-be, g pedig a B halmazt C-be képező függvény, akkor létezik a $g \circ f$ összetett függvény, amely az A halmaz egy x eleméhez a C halmaz $g(f(x))$ elemét rendeli.

Tasha hamarosan már sokkal több aritmetikai összefüggést volt képes átlátni, mint amennyit az idők során betanult. Szinte gondolkodás nélkül ki tudta számolni, mennyi lesz az eredmény, ha tizennégyhez ötöt vagy ha negyvenhathoz négyet adunk, holott egyik sem szerepelt munkafüzetének „összeadó tábláin". Azt is tudta, mennyi kétszer száz. Az aritmetika általános tételeihez azonban meg kellett ismerkednie az összes természetes szám halmazával is. Szülei nagyon jól tudták, hogy ennyi tehén, kacsa vagy könyv nem létezik, de ennek nem is tulajdonítottak különösebb jelentőséget. Úgy vélték, a matematika méltóságán aluli lenne, ha ilyen apróságokon fönnakadna. Az igazat megvallva hasonlóan vélekedtek az aktuális vagy lehetséges számjelekről, a téridőpontokról és -tartományokról, de más efféllékről is. Legyenek bármilyen kiváló dolgok, az aritmetika – erről határozottan meg voltak győződve – nem függhet a létezésüktől.

De nem is a halmazképzés transzfinit iterációját választották kiindulási alapul (mint *ZF* végtelenségi axiómái). Erre a konstrukcióra nemigen tudtak úgy tekinteni, mint ami az aritmetika kezdeteinél jelen van. Úgy tűnt, nincs is jelen másutt, csak bizonyos axiomatikus halmazelméletekben. Jobbnak látták tehát, ha olyan halmazképző műveletekből indulnak ki, amelyeknek Tasha matematikai tanulmányai során később is hasznát láthatja majd.

Elmagyarázták tehát Tashának, hogy azok a halmazok, amelyekkel mindaddig megismerkedett, mind *konkrét* halmazok, ami semmi többet nem jelent, mint hogy konkrét tárgyak összességei. Leányuk persze akkorra már tudta, hogy a számlálás és a műveletek eredményei nem függenek attól, hogy mik is a szóban forgó halmazok elemei. Eljött tehát az ideje, hogy az *absztrakt* halmazokkal és függvényekkel is megismerkedjen. Az absztrakt halmazok a konkrét halmazok idealizációinak, azok reprezentációinak tekinthetők. Ha A absztrakt halmaz, akkor – a konkrét halmazokkal ellentétben – nem elemeivel adjuk meg, hanem olyan függvényekre hivatkozva, amelyek A-n értelmezettek, illetve A-ba képeznek. Mostantól a 'halmaz' és a 'függvény' szavakat használva mindig absztrakt halmazokra, illetve függvényekre gondolunk, hacsak nem éppen konkrétakat adunk meg.

Arra, hogy az f függvény az A halmazt a B halmazba képezi, Tasha szülei a következő jelölést használták: $f\colon A \to B$. Azt mondták továbbá, hogy minden $g\colon B \to C$ függvénynek létezik az f-fel vett $g \circ f\colon A \to C$ kompozíciója, de a $g \circ f$ függvényt nem annak alapján definiálták, hogy mely C-beli elemeket rendeli az A halmaz elemeihez. Mint látni fogjuk, később már magukat az elemeket is bizonyos függvényekre hivatkozva definiálták. Előbb azonban axiómákban posztulálták a függvénykompozíció asszociativitását és az identikus leképezések létezését. Ha tehát f és g mellett adott egy $h\colon C \supset D$ függvény is, akkor mindig fennáll $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, s tetszőleges A halmaz esetén létezik olyan $1_A\colon A \to A$ függvény, amelyre teljesül, hogy bármely $f\colon A \to B$ és $h\colon C \to A$ függvényre $f \circ 1_A = f$ és $1_A \circ h = h$. Mindezt röviden így foglalhatjuk össze: a halmazok és a függvények kategóriát alkotnak.

A következő axióma olyan 1 halmaz létezését posztulálja, amelybe minden halmazból pontosan egy függvény képez. E halmazt az *absztrakt egyelemű halmaznak* tekinthetjük. Ha A halmaz, akkor A elemei definíció szerint az 1-en értelmezett A-ba érkező $x\colon 1 \to A$ függvények. Rögtön adódik, hogy 1-nek pontosan egy eleme van. Ha x az A halmaz egy eleme, f pedig tetszőleges $A \to B$ függvény, akkor az $f \circ x$ kompozícióra az $f(x)$ jelölést alkalmazhatjuk. Eszerint $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ a függvénykompozíció asszociativitásának, $1_A(x) = x$ pedig az identitás-axiómának speciális esete.

Mindezeken felül Tasha szülei a következő axiómákat fogalmazták meg:

SZORZAT – Tetszőleges A és B halmazokhoz megadható egy $A \times B$ halmaz a $p_1\colon A \times B \to A$ és a $p_2\colon A \times B \to B$ függvényekkel, amelyekre teljesül, hogy tetszőleges S halmazhoz és $f\colon S \to A$, valamint $g\colon S \to B$ függvényekhez létezik pontosan egy $\langle f, g\rangle\colon S \to A \times B$ függvény, amellyel $p_1 \circ \langle f, g\rangle = f$ és $p_2 \circ \langle f, g\rangle = g$.

KIEGYENLÍTŐ – Minden A és B halmazhoz és $f, g\colon A \to B$ függvénypárhoz megadható egy $e\colon E \to A$ függvény amelyre $f \circ e = g \circ e$ és amelyre teljesül, hogy tetszőleges, az $f \circ h = g \circ h$ kikötésnek eleget tevő $h\colon T \to A$ függvényhez pontosan egy olyan $u\colon T \to E$ függvény létezik, amelyre $e \circ u = h$.

KO-SZORZAT – Tetszőleges A és B halmazokhoz megadható egy $A + B$ halmaz az $i_1\colon A \to A + B$ és az $i_2\colon B \to A + B$ függvényekkel, amelyekre teljesül, hogy tetszőleges S halmazhoz és $f\colon A \to S$, valamint $g\colon B \to S$ függvényekhez létezik pontosan egy $\binom{f}{g}\colon A + B \to S$ függvény, amellyel $\binom{f}{g} \circ i_1 = f$ és $\binom{f}{g} \circ i_2 = g$.

„NEM-TRIVIALITÁS" – Az előző axióma alapján létező, az 1 halmazból az $1 + 1$ halmazba képező i_1 és i_2 függvények különbözőek.

Ezek az axiómák elég egyszerűen absztrahálhatóak voltak azokból a fogalmakból, amelyekhez Tasha már korábban, a konkrét véges halmazokból kiindulva eljutott. A szorzat-axiómában szereplő $A \times B$ például tökéletesen megfelelt a hagyományos szorzat-fogalomnak. A definíció szerint $A \times B$ egy eleme tetszőleges $\langle x, y \rangle$ lehet, ha x az A-nak, y pedig a B-nek eleme. Ha pedig a részhalmazokra vonatkozóan a rögvest ismertetendő értelmezést fogadjuk el, akkor nyilvánvaló lesz az is, hogy az $e\colon E \to A$ kiegyenlítő az A halmaz azon részhalmaza, amelynek minden x elemére $f(x) = g(x)$. Az $A + B$ ko-szorzat a két halmaz – absztrakt – diszjunkt uniója. A „nem-trivialitás" axiómája biztosítja, hogy az $1 + 1$ halmaznak van két különböző eleme. Ennek alapján fogjuk majd belátni, hogy a 0 egyetlen természetes számnak sem rákövetkezője.[2]

A következő axiómához szükségünk lesz a részhalmaz, pontosabban az absztrakt részhalmaz-beágyazás fogalmára. Az A halmaz részhalmaz-beágyazásának tekintünk bármely

[2] Tanulságos belegondolni, hogy a „nem-trivialitást" leszámítva a többi axióma, a végtelenség axiómáját is beleértve, kielégíthető azzal a modellel, amelyben 1 az egyetlen objektum és ennek identikus leképezése, 1_1 az egyetlen függvény.

injektív $i\colon S \to A$ függvényt, amelyre tehát teljesül, hogy S bármely x és y elemére, ha $i(x) = i(y)$, akkor $x = y$. Ha i ilyen, akkor gyakran használjuk az $i\colon S \rightarrowtail A$ jelölést. A kategóriaelmélet szokásos (kissé pongyola) szóhasználatát követve S-re és i-re egyaránt mint az A egy „részhalmazára" hivatkozunk.[3]

Ha most $i\colon S \rightarrowtail A$ az A halmaz egy részhalmaza, $x\colon 1 \to A$ pedig egy eleme, akkor amennyiben van olyan $h\colon 1 \to S$, amellyel $x = i \circ h$, úgy azt mondjuk, hogy x az i részhalmaz egy eleme. Ezt szokás úgy is fogalmazni, hogy az x elem „átfaktorizál" a részhalmaz-beágyazáson. Tetszőleges A halmaz esetén $1_A\colon A \rightarrowtail A$ olyan részhalmaza A-nak, amelyben A valamennyi eleme benne van. Nem nehéz belátni, hogy az A halmazon értelmezett tetszőleges f és g függvények $e\colon E \to A$ kiegyenlítője mindig A egy részhalmaza, s a kiegyenlítő-axiómában szereplő u egyértelműsége folytán e részhalmazt pontosan azok az A-beli x elemek alkotják, melyekre $f(x) = g(x)$.

Legyenek $i\colon S \rightarrowtail A$ és $j\colon T \rightarrowtail A$ az A halmaz részhalmazai; azt mondjuk, hogy i része j-nek, jelölése $i \subseteq j$, ha létezik olyan $h\colon S \to T$ függvény, amelyre $i = j \circ h$, más szóval, ha i átfaktorizál j-n. Például $i = 1_A \circ i$ miatt A bármely i részhalmaza része 1_A-nak. Azt mondjuk továbbá, hogy i és j az A halmaz *ekvivalens* részhalmazai (jelölés: $i \leftrightarrow j$), ha fennáll $i \subseteq j$ és $j \subseteq i$. Nyilvánvaló, hogy amennyiben $i \subseteq j$, úgy A minden i-beli eleme j-nek is eleme. A megfordítás a legtöbb kategóriában nem igaz, így alkalmas a halmazok kategóriájának specifikálására. Tasha tehát axiómái sorába felvette a következőt is:

> 1 GENERÁL – Ha az A halmaz i és j részhalmazaira teljesül, hogy i minden eleme egyúttal j-beli is, akkor $i \subseteq j$ is fennáll.

Az axióma közvetlen következménye, hogy $i \leftrightarrow j$ pontosan akkor, ha i-ben pontosan ugyanazok az A-beli elemek vannak,

[3] A következő, „1 generál" jelzésű axióma biztosítja, hogy egy f függvény pontosan akkor injektív, ha f – a kategóriaelmélet bevett terminológiáját használva – monomorfizmus. [$f\colon A \to B$ monomorfizmus, ha tetszőleges $g, h\colon C \to A$ függvények esetén $f \circ g = f \circ h$ fennállásából $g = h$ következik. – *A ford.*]

mint j-ben. Az alábbi egyszerű tétel szerint egy függvényt teljesen meghatározza az, ahogyan az elemekre hat:

1. TÉTEL
Tetszőleges A és B halmazok, valamint $f, g\colon A \to B$ függvények esetén, amennyiben az A halmaz minden x elemére teljesül, hogy $f(x) = g(x)$, úgy $f = g$.

Bizonyítás: Ha Legyen $x\colon 1 \to A$ az A halmaz egy tetszőleges eleme. A feltétel szerint $f \circ x = g \circ x$, így a kiegyenlítő-axióma szerint van olyan $u\colon 1 \to E$ függvény, amellyel $e \circ u = x$, ahol $e\colon E \rightarrowtail A$ az f és g kiegyenlítője. A definíció szerint ez azt jelenti, hogy x az e-nek is eleme. Beláttuk tehát, hogy $1_A\colon A \to A$ minden eleme egyúttal e-nek is eleme. Az 1 általi generálás axiómája szerint így $1_A \subseteq e$ is fennáll, van tehát olyan $h\colon A \to E$, amellyel $1_A = e \circ h$. $f \circ e = g \circ e$ miatt $f \circ (e \circ h) = g \circ (e \circ h)$, azaz $f \circ 1_A = g \circ 1_A$, amiből $f = g$. □

Egy konkrét K halmazt – mondjuk kacsák egy halmazát – az absztrakt A halmazzal úgy reprezentálunk, hogy K minden elemét megfeleltetjük A egy elemének, azaz minden kacsához egy $1 \to A$ függvényt rendelünk. Ha úgy tartja kedvünk, akár azonosíthatjuk is a kacsákat ezekkel a függvényekkel (egyetlen axiómánkból sem következik, hogy a kacsák nem lehetnek függvények). Ekkor A akármelyik $S \rightarrowtail A$ részhalmazát válasszuk is ki, teljesül rá, hogy bármely kacsa vagy S-beli, vagy nem. Az A halmaz részhalmazait – ekvivalencia erejéig – a bennük lévő kacsák egyértelműen meghatározzák. Ha a B halmaz elemei strandlabdák (vagy azokhoz rendeljük őket), akkor az $A \times B$ halmazt olyan $\langle k, s\rangle$ párok alkotják (elemei olyan párokhoz vannak rendelve), amelyekben k egy kacsa, s pedig egy strandlabda. És így tovább. Természetesen abban az esetben, ha kikötjük, hogy az A halmaz bizonyos kacsákból áll, akkor az A halmazt egy nem-strukturális jellemzővel ruházzuk fel. A halmazelméletnek csupán a tisztán absztrakt elemeiről állítható, hogy tisztán strukturálisak.

A természetes számoknak tenniük azt kell, hogy lehetőséget nyújtsanak rekurzív definíciók megfogalmazására. Azaz egy N halmaznak, mint a természetes számok halmazának kell hogy legyen egy 0-val jelölt eleme, továbbá kell lennie rajta egy $s\colon N \to N$ rákövetkezőfüggvénynek, melyekre teljesül, hogy amennyiben adott egy A halmaz, annak egy x eleme és egy $f\colon A \to A$ függvény, úgy egyértelműen megadható egy olyan $u\colon N \to A$ függvény, amelyre $u(0) = x$ és N minden n elemére $u(s(n)) = f(u(n))$, azaz $u \circ s = f \circ u$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy u-t az x, f rekurziós feltételekkel definiáltuk. Az ilyen tulajdonságú $N, 0, s$ hármasokat *természetesszám-objektumnak* nevezzük. A gondolat Lawvere-től ered.

Az aritmetikához valójában ennél kicsit többre, paraméteres rekurzív definíciókra is szükségünk van. Ha P paraméterek egy tetszőleges halmaza, $x\colon P \to A$ a (P-vel) paraméterezett kezdőfeltétel, f pedig tetszőleges $A \times P \to A$ függvény, akkor egyértelműen léteznie kell egy $u\colon N \times P \to A$ függvénynek, amelyre $u(0,p) = x(p)$ és $u(s(n),p) = f(u(n,p),p)$ tetszőleges P-beli p és N-beli n esetén. Az e feltételnek eleget tevő természetesszám-objektumokat *stabilnak* mondjuk. Ha valamely természetesszám-objektum stabil, akkor – az adott kategórián belül – valamennyi az. Ez a 3. tétel alapján válik majd nyilvánvalóvá, amelynek bizonyítása a stabilitás fogalmát nem használja.

Mindezek alapján kimondhatjuk az utolsó axiómát, amelyre Tashának az aritmetika megalapozásához szüksége volt:

VÉGTELENSÉGI AXIÓMA – Létezik stabil természetesszám-objektum.

Szülei azt tanították neki, hogy a számok az N halmaz elemei, $1 = s(0)$, $2 = s(s(0))$ és így tovább. Fontos, hogy az 1 számot ne keverjük össze az 1 absztrakt egyelemű halmazzal. Tasha bármely halmaz elemeit meg tudta számolni oly módon, hogy párba állította őket a számokkal. Azt is belátta, hogy bármely n-hez megadható az az $[n] \rightarrowtail N$ részhalmaz, amelynek elemei éppen az n-nél kisebb számok.[4] Tasha tehát nyugodtan kijelenthette: egy A halmaz pontosan akkor n elemű, ha izomorf $[n]$-nel.

Az összeadást Tasha a következő paraméteres rekurzióval definiálta: $0 + m = m$ és $s(n) + m = s(n + m)$. Elégedetten állapította meg, hogy az így kapott összefüggések tökéletes egyezést mutatnak egykori összeadótáblájának eredményeivel. A szorzást így definiálta: $0 \cdot m = 0$ és $s(n) \cdot m = (n \cdot m) + m$. Ameddig ellenőrizni lehetett, így is a régi szorzótáblával egybehangzó eredményeket kapott. Mi több, a szorzás és az összeadás még mindig megfelelt a halmazok szorzatának, illetve diszjunkt uniójának, csak most már az összes véges halmazon értelmezve.

Tasha azt is megfigyelte, hogy létezik egy $f\colon N \to 1 + 1$ függvény, amely a következő összefüggésekkel definiálható: $f(0) = i_1$ és $f(s(n)) = i_2$. Mivel $i_1 \neq i_2$, ebből arra következtetett, hogy nincs olyan n, amelyre fennállna $0 = s(n)$. Kiderült, hogy értelmezhető olyan injektív h függvény, amely – a 0 kivételével – minden számhoz annak közvetlen megelőzőjét rendeli: $h(0) = 0$ és $h(s(n)) = n$, és ebből arra következtetett, hogy s kölcsönösen egyértelmű. Végül azt is bebizonyította, hogy N bármely olyan részhalmaza, amelynek 0 eleme, és amely zárt a rákövetkezésre, csak maga az N lehet. Pontosabban:

2. TÉTEL
Legyen $i\colon I \rightarrowtail N$ az N olyan részhalmaza, amelynek 0 eleme, s amelyre teljesül, hogy valamely $p\colon I \to I$ függvényre $i \circ p = s \circ i$ (vagyis az s rákövetkezőfüggvénynek az I halmazra való p megszorítása minden olyan értéket felvesz, amelyet maga s is). Akkor $i \leftrightarrow 1_N$.

Bizonyítás: Nyilván $i \subseteq 1_N$. A másik irányú tartalmazás bizonyításához legyen $h\colon N \to I$ olyan függvény, amelyre $h(0) = 0$

[4] Tekintsük a következő két függvényt: azt a $f\colon N \times N \to N$-t, amely bármely $\langle p, q\rangle$ párhoz a $p + q + 1$ számot rendeli, továbbá azt a $N \times N \to N$ konstans függvényt, amely minden párhoz az n számot rendeli. Ezek $[n] \rightarrowtail N \times N$ kiegyenlítője azon $\langle p, q\rangle$ párok halmaza, amelyekre $p + q + 1 = n$. E részhalmaznak a szorzat első komponensére való $[n] \rightarrowtail N$ projekciója szintén injektív, tehát részhalmaz, amelynek p pontosan akkor eleme, ha $p < n$.

és $h(s(n)) = p(h(n))$. Ezzel $i \circ h(0) = 0$, valamint $i \circ h(s(n)) = s(i \circ h(n))$, azaz $i \circ h$ a $0, s$ rekurziós feltételekkel definiálható. Azt kapjuk tehát, hogy $i \circ h = 1_N$, azaz $1_N \subseteq i$. □

Az $N, 0, s$ természetesszám-objektumra tehát valamennyi Peano-axióma teljesül. Tasha innen már nekiláthatott a rekurzív függvények elmélete kidolgozásának, bár szülei a vizsgálódásnak ezt az irányát egyelőre nem erőltették. De amikor elmúlt tizenhat éves, elérkezettnek látták az időt, hogy a halmazok toposzának axiomatikus elméletét a hatványhalmaz-axiómával teljessé tegyék (a ko-szorzatokra vonatkozó axiómát pedig fölöslegessé). Ez az utolsó lépés azonban a „megkülönböztethetetlenségre" vonatkozó alapvető megfigyeléseket nem befolyásolta, mint azt hamarosan látni fogjuk.

A lányok összevetik aritmetikai ismereteiket

Brittany aritmetikai képzése a Tashánál jól bevált tanmenetet követte – az egyetlen eltérést az jelentette, hogy a fiatalabb nővér, aki a kalligrafikus elemeket különös előszeretettel alkalmazta, a szülei matematikakönyveiben látott képletek mintájára a maga természetesszám-objektumára az $N', 0', s'$ jelölést vezette be. A nővérek összevetették aritmetikai ismereteiket, s úgy találták, pontosan ugyanazokat az összefüggéseket tekintik érvényesnek, sőt abban is megegyeznek, hogy – tetszőleges n esetén – egy adott halmaz elemeinek száma n-e vagy sem. Már csak az volt kérdéses, különbözik-e egyáltalán a Tasha-féle $N, 0, s$ Brittany $N', 0', s'$ természetesszám-objektumától. Brittany számára az alábbi tétel bizonyítása semmiféle nehézséget nem jelentett:

3. TÉTEL
N és N' izomorf halmazok.

Bizonyítás: Definiáljuk a $v\colon N' \to N$ függvényt a $0, s$, a $w\colon N \to N'$ függvényt pedig a $0', s'$ rekurziós feltételekkel. Akkor $v \circ w(0) = 0$ és $v \circ w(s(n)) = s(n)$, $v \circ w$ tehát olyan $N \to N$ függvény, amelyet a $0, s$ rekurziós feltételek határoznak meg. Mivel azonban az egyetlen ilyen függvény 1_N, azt kapjuk, hogy $v \circ w = 1_N$. Hasonlóképpen $w \circ v = 1_{N'}$. □

Ezzel mintha előreléptek volna, ekkor azonban Tasha felfigyelt arra, hogy – bizonyíthatóan – végtelen sok természetesszám-objektum létezik. Nyilvánvaló volt, hogy tetszőleges $N, 0, s$ esetén végtelen sok $N \to N$ izomorfizmus definiálható, így kapta a következő,

4. TÉTEL-t
$h \colon N \to M$ izomorfizmus, akkor $M, h(0), h \circ s \circ h^{-1}$ szintén természetesszám-objektum.

Bizonyítás: Tekintsük az $x \colon 1 \to A$ és az $f \colon A \to A$ függvényeket s az általuk meghatározott $u \colon N \to A$ függvényt. Akkor az $u \circ h^{-1} \colon M \to A$ függvényre $u \circ h^{-1}(h(0)) = x$, továbbá $u \circ h^{-1}(h \circ s \circ h^{-1}(m)) = u \circ s \circ h^{-1}(m) = f \circ u \circ h^{-1}(m) = f(u \circ h^{-1}(m))$ tetszőleges M-beli m esetén. Az egyértelműség igazolását az Olvasóra bízzuk. □

KÖVETKEZMÉNY
Ha $h, k \colon N \to N$ különböző izomorfizmusok, akkor $N, h(0), h \circ s \circ h^{-1}$ és $N, k(0), k \circ s \circ k^{-1}$ különböző természetesszám-objektumok.

Bizonyítás: Nyilván a h függvény rekurziós feltételei $h(0)$ és $h \circ s \circ h^{-1}$, a k függvényt viszont a $k(0)$ és a $k \circ s \circ k^{-1}$ feltételek határozzák meg. Különböző függvények rekurziós feltételeinek pedig nyilván különbözniük kell. □

Úgy is fogalmazhatunk: egy természetesszám-objektum rákövetkezőfüggvényének minden izomorf átrendezése egy új rákövetkezőfüggvényt, következésképpen egy új természetesszám-objektumot eredményez. Tasha levonta a levonnivalót: még ha tudná, hogy $N = N'$, akkor sem tudná bebizonyítani, hogy $0 = 0'$ vagy hogy $s = s'$. Másrészt viszont a nővérek semmi olyasmit nem találtak, ami $N, 0, s$-ről bizonyítható lett volna, $N', 0', s'$-ről viszont nem. Ez persze nem is volt meglepő, elvégre sem $N, 0, s$-ről, sem $N', 0', s'$-ről nem tudtak semmi közelebbit azon túl, hogy természetesszám-objektumok.

Mi több, azt a jóval erősebb állítást is igazolni tudták, hogy $N, 0, s$ és $N', 0', s'$ bizonyíthatóan nem különböztethetők meg egymástól. Legyen $P(X, f, g)$ halmazelméletük egy tetszőleges formulája, amelyben nem szerepel egyetlen konstans sem, s csupán három változó fordul benne elő szabadon: az X halmaz-, valamint az f és g függvényváltozók. A lányok bizonyítani tudták a következő bikondicionálist:

$$P(N, 0, s) \equiv P(N', 0', s').$$

A két természetesszám-objektum tehát bizonyíthatóan ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik. A $P(N, 0, s)$ formula $P(N', 0', s')$-vel való ekvivalenciája még akkor is bizonyítható, ha az előbbi eldönthetetlen, azaz sem bizonyítani, sem cáfolni nem lehet.[5]

A dolog úgy áll, hogy ténylegesen megadható egy

$$\mathsf{TSzO}(X, f, g)$$

predikátum, amely azt mondja, hogy X, f, g természetesszám-objektum; ezt felhasználva a nővérek az alábbi általánosított megkülönböztethetetlenségi tételt is bebizonyították:

$$[\mathsf{TSzO}(X, f, g) \,\&\, \mathsf{TSzO}(Y, h, k)] \supset [P(X, f, g) \equiv P(Y, h, k)].$$

Az elmélet természetesszám-objektumai tehát nem különböztethetők meg egymástól; valamennyi bizonyíthatóan ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik.

Az $N, 0, s$-ről az $N', 0', s'$-ra való és a fordított irányú áttérés során a lányok egy tisztán bizonyításelméleti gondolatmenetet alkalmaztak. Halmazelméletükben formalizálták a következő **F** operátor definícióját:

[5] Ha a $P(X, f, g)$ formulát így definiáljuk: $0 = f \,\&\, s = g$ vagy így: $f = x \,\&\, g = y$, ahol x és y (szabad) változók, akkor metatételünk állítása nem marad érvényben. A szóban forgó bikondicionálisból ugyanis mindkét esetben az következne, hogy $0 = 0'$ és $s = s'$, ami viszont nem bizonyítható. A magyarázat az, hogy a természetesszám-objektumok ténylegesen „különbözőek", de csak „numerikusan", annyiban, hogy mindegyik önmaga, s nem valamelyik másik, nem különböznek viszont az olyan tulajdonságok tekintetében, amelyek kimondásához egyetlen objektumot sem kell közelebbről meghatározni.

Legyenek A és B – N-től és N'-től különböző – halmazok, f és g tetszőleges függvények, $v\colon N' \to N$ pedig a 3. tételben értelmezett izomorfizmus; legyen $\mathbf{F}A = A$, $\mathbf{F}N = N'$ és $\mathbf{F}N' = N$, továbbá

$$\begin{array}{ll}
\text{ha } f\colon A \to B & \text{akkor } \mathbf{F}f = f, \\
\text{ha } f\colon A \to N & \text{akkor } \mathbf{F}f = v^{-1} \circ f\colon A \to N', \\
\text{ha } f\colon N \to B & \text{akkor } \mathbf{F}f = f \circ v\colon N' \to B, \\
\text{ha } f\colon N \to N & \text{akkor } \mathbf{F}f = v^{-1} \circ f \circ v\colon N' \to N', \\
\text{ha } f\colon N \to N' & \text{akkor } \mathbf{F}f = v \circ f \circ v\colon N' \to N,
\end{array}$$

s ezekhez vegyük még hozzá az N és N', valamint egyúttal v és v^{-1} felcserélésével kapott megfelelő kikötéseket.

Könnyedén belátták, hogy $\mathbf{F}0 = 0'$, $\mathbf{F}s = s'$ és vice versa. A döntő azonban a következő két megfigyelés. Először is, $\mathbf{F}$ a halmazelmélet valamennyi atomi formulájának megtartja az érvényességét, azaz a halmazelméletben bizonyítható, hogy ha $f\colon C \to D$ függvény, akkor az $\mathbf{F}f$ függvény $\mathbf{F}C$-ből érkezik $\mathbf{F}D$-be, továbbá $\mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}g \circ \mathbf{F}f$ és $\mathbf{F}1_C = 1_{\mathbf{F}C}$, tetszőleges C és D halmazok valamint f és g függvények esetén.[6] Másodszor, $C = \mathbf{FF}C$ és $f = \mathbf{FF}f$, vagyis azon túl, hogy az $\mathbf{F}$ operátor minden halmazra és függvényre alkalmazható, egyúttal minden halmaz és függvény előáll $\mathbf{F}$-nek valamely halmazra, illetve függvényre való alkalmazásának eredményeként.

Ha Q a szóban forgó halmazelmélet egy formulája, akkor jelölje $Q_{\mathbf{F}}$ azt a formulát, amelyet úgy kapunk, hogy Q-ban minden konstans és szabad változó elé '$\mathbf{F}$'-et írunk. Bizonyítható, hogy $Q \equiv Q_{\mathbf{F}}$. Ha Q-ban nincsenek kvantorok, akkor csupán az $\mathbf{F}$-re vonatkozó első és második kitételre kell hivatkoznunk. A kvantoros formulákra vonatkozóan pedig elegendő, ha megjegyezzük: egy formula pontosan akkor igaz valamely C halmazra, ha igaz $\mathbf{F}C$-re, s ugyanez vonatkozik a függvényekre is.

[6] A szorzat-, a kiegyenlítő- és a ko-szorzat-axiómát úgy tekintjük, hogy ezek a halmazok és a függvények közötti relációkat írják le, nem pedig operátorok implicit definíciói. Nem értelmezünk például olyan $\_ \times \_$ operátort, amely az A és a B halmazokhoz egy „kitüntetett" $A \times B$ szorzatot rendel, $\mathbf{F}$ ugyanis nem tartaná meg feltétlenül ezeket a „kiválasztott" értékeket.

Előző eredményünk, miszerint $P(N, 0, s) \equiv P(N', 0', s')$, az általános eredmény azon speciális esete, amelyben a Q formula $P(N, 0, s)$. Metatételünk bizonyításának módosításával pedig a fenti általános megkülönböztethetetlenségi tétel is megkapható.

A megkülönböztethetetlenség nem csupán a természetesszám-objektumok sajátossága: elméletünkben az izomorf halmazokat nem tudjuk megkülönböztetni egymástól. Jelölje $\mathsf{ISOM}(X, Y)$ azt, hogy X és Y izomorf objektumok, azaz megadható közöttük egy invertálható leképezés. Legyen most $P(X)$ tetszőleges olyan formula, amelyben nincsenek sem konstansok, sem X-től különböző szabad változók. Akkor egy hasonló – sőt egyszerűbb – gondolatmenet alapján bizonyítható, hogy

$$\mathsf{ISOM}(X, Y) \supset (P(X) \equiv P(Y).$$

Fejtegetéseink szokatlan részletességgel járják körbe azt, amit a kategóriaelmélet művelői többnyire röviden így fejeznek ki: bármely kategória izomorf objektumai pontosan ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkeznek

Más halmazelméletek

A ZF elméletben nincsen ilyesféle megkülönböztethetetlenség. A Peano-axiómák modelljei itt is, a természetesszám-objektumokhoz hasonlóan, $N, 0, s$ hármasok, éspedig egy halmazból, annak egy eleméből és egy rákövetkezőfüggvényből állnak. Tegyük fel, hogy ZF-ben bizonyítani tudjuk, hogy $N, 0, s$ és $N', 0', s'$ egyaránt modelljei az axiómáknak. Akkor éppúgy, mint a kategoriális halmazelméletben, most is belátható, hogy N és N' izomorf halmazok, továbbá ha valami bizonyítható $N, 0, s$-ről, akkor ugyanaz $N', 0', s'$-re is áll. A megkülönböztethetetlenségi tételek azonban nem bizonyíthatók.

A ZF-elméletben ugyanis a Peano-axiómák $N, 0, s$ modelljeinek $P(N, 0, s)$ tulajdonságainak többségét a Peano-axiómák nem rögzítik. Legyen például $P(N, 0, s)$ az a tulajdonság, hogy az N halmaz minden eleme egyelemű halmaz. Ha e tulajdonság a Peano-axiómáknak nem következménye, úgy az általánosított megkülönböztethetetlenségi tétel adott esete még bizonyíthatóan hamis is lehet. A Peano-axiómáknak (vagy bármely más axiómarendszernek) egyszerűen nincs *ZF*-ben olyan modellje, amely kizárólag azokkal a tulajdonságokkal rendelkezne, amelyek valamennyi modellben közösek. S éppen ezen fordul meg Benacerraf érvelése. A kategoriális halmazelméletben azonban a helyzet teljesen más. Ezen elmélet objektumai pontosan olyanok, amilyennek Benacerraf a számokat szeretné: kizárólag strukturális tulajdonságokkal rendelkeznek.

Az előző részben bemutatott megkülönböztethetetlenségi tételhez hasonló eredmény a másodrendű logika keretei között már bizonyítható, lásd például Hellman elemi ekvivalencia-tételét ([Hellman 1989], 41. p.). A másodrendű logika azonban, éppúgy, mint az általunk ismertetett halmazelmélet, még mindig túl gyenge ahhoz, hogy a matematika általános keretelméletének tekinthessük. Hellman bemutatja, miként lehet – egy kódolás segítségével – a matematika jelentős részét a másodrendű logika keretei közé erőszakolni. Kiderül ugyanakkor az is, hogy mindez tökéletesen alkalmatlan bármi másra, mint a formalizmus célkitűzéseinek megvalósítására – mi több, könyve 3. fejezetében maga Hellman érvel amellett, hogy módszere még a modern fizikai elméletekben alkalmazott matematikai elméletek formalizálásához sem elég erős. ([Hellman 1989], 94. skk. p.).

A feladat tehát a következő: adjunk meg egy elegendően erős halmazelméletet, amely mindazonáltal – *ZF*-fel ellentétben – a strukturalizmus kívánalmainak is megfelel.[7] E célból a fenti axiómákat ki kell bővítenünk, hogy a halmazok toposzának teljes elméletéhez jussunk el. E kibővítéshez már csak a hatványhalmaz-axiómát kell kimondanunk, ez lényegében ugyanúgy megy, mint korábbi axiómáink, csak a konstruk-

[7] Hellman azt az utat követi, amelyet [Parsons 1990] *eliminatív strukturalizmusnak* nevez: *ZF*-et formális elméletnek, a kvantifikációs tartománynak pedig ezen elmélet modelljeinek összességét tekinti. A kategoriális halmazelmélet nem eliminatív. Objektumai maguk a – strukturálisan leírt – halmazok, nem pedig egy formális elmélet modelljei.

ció kissé technikaibb jellegű.[8] Az így kapott axiómarendszer deduktív ereje megegyezik a Zermelo-féle halmazelmélettel (azaz *ZF*-fel a helyettesítés axiómája nélkül), ha a részhalmaz-axiómában csak korlátos kvantorokat engedünk meg. Ha tetszik, megengedhetjük ugyanitt a korlátozatlan kvantifikációt is, vagy akár a kiválasztási axiómát is felvehetjük posztulátumaink közé. A részleteket illetően lásd [McLarty 1992] 22. fejezetét. Ha így teszünk, elméletünkben a „matematika egészét" formalizálhatjuk, csakúgy, mint az erős halmazelméletekben, ám a korábban bizonyított megkülönböztethetetlenségi eredmények is mind érvényben maradnak.

Nehéz a választás...

Tasha és Brittany csak egyetérteni tudott Benacerraf már idézett megjegyzésével, mely szerint az aritmetika „az a tudomány, amelynek tárgya a valamennyi progresszióban, kizárólag progresszió-voltuk következtében megjelenő absztrakt struktúra". E tudomány tehát, ez nyilvánvaló volt számukra, a természetesszám-objektumok tudománya. Brittany azonban sokat tűnődött azon a megjegyzésen, mely szerint egy matematikai struktúrára leginkább úgy tekinthetünk, mint „egymáshoz kapcsolódó objektumok egy lehetséges rendszerének formájára, amelyben az objektumok összes olyan tulajdonságát figyelmen kívül hagyjuk, amelyek kapcsolataik szempontjából irrelevánsak" ([Shapiro 1983], 535. p.). Tanulmányai alapján lehetetlennek tűnt, hogy a természetesszám-objektumok elemeinek bármi más sajátosságai is legyenek az aritmetikai jellegű viszonyokon kívül. Mitől is kellene tehát eltekinteni?

Egyetemi tanulmányai alatt Tasha sokat hallott egy fiúról, Ernie-ről, aki az aritmetikát szintén annak megalapozásával együtt tanulta meg. Egy szép napon a kollégium ebédlőjében össze is találkoztak. Ernie barátjával, Johnnyval együtt már is-

[8] Lásd például [Pitts 1992]-t, amely a toposzelmélet remekbe szabott, a logikus nézőpontját is tükröző összefoglalását adja. Érdemes ezzel összevetni [McLarty 1992] 13.16. feladatát.

merte *ZF*-et, s arra a következtetésre jutott, hogy a számok nem lehetnek halmazok. Így aztán amikor Tasha a természetes számok halmazáról beszélt neki, azonnal megkérdezte, tulajdonképpen mire is gondol. Mikor Tasha a megkülönböztethetetlenséget kezdte magyarázni, Ernie hamar elveszítette a fonalat.

– Mondd csak – kérdezte –, szerinted a 0 melyik halmaz?

Tasha persze készen állt a válasszal:

– A 0 nem halmaz, hanem *N* egy eleme.

Ernie nem értette:

– De a halmazok elemei maguk is halmazok! – s most Tasha volt az, aki kissé zavarba jött. Rájöttek, hogy egészen eltérő elképzelésük van a halmazokról.

Tasha megkérte újdonsült barátját, fejtse ki részletesebben is álláspontját. Ernie így is tett; becsületére legyen mondva, rögvest rámutatott, hogy a Tashának oly kedves megkülönböztethetetlenségi tételek e megközelítésben érvényüket vesztik. Leszögezte: a halmazokat egyértelműen meghatározzák az elemeik, amelyek maguk is mind halmazok.

Tasha tovább faggatózott:

– Úgy érted, hogy a természetes számokat egy speciális halmazként definiálod? – kérdezte Ernie-t.

– Naná, hogy nem – hangzott a válasz –, a természetes számok nem halmazt, hanem struktúrát alkotnak. Nem adható tehát egyértelmű definíció.

– Ezek szerint éppen olyanok, mint az én halmazaim?

– Pontosan olyanok.

Tasha afelől érdeklődött, ugyanez-e a helyzet a valós számok vagy az euklideszi sík esetében, s megint csak igenlő választ kapott. Ernie álláspontja szerint ezek mind absztrakt struktúrák, amelyekre hivatkozva könnyen fogalmazhatunk meg halmazokra vonatkozó állításokat – ám ők maguk nem halmazok, sőt, igazából nem is valódi objektumok.

– A híres halmazelméleted előnye tehát az, hogy az objektumaival a matematikusok sohasem foglalkoznak! – csodálkozott Tasha.

Ernie nem tiltakozott:

– Ha úgy tetszik, ezt is mondhatod, elvégre a matematikusok általában struktúrákkal dolgoznak. Az én halmazaim azonban Leibniz törvénye szerint legitim objektumok, a te absztrakt halmazaiddal ellentétben.

Tasha, aki mindig a matematikát tartotta szem előtt, csupán egyetlen Leibniz-szabályt ismert, a szorzatfüggvény deriváltjára vonatkozót. Ernie elmagyarázta, hogy egy mély metafizikai elvről van szó, mely szerint két objektum nem lehet különböző anélkül, hogy valamely tulajdonságukban el ne térnének egymástól. Tasha ezt sem matematikainak nem találta, sem meggyőzőnek. Úgy vélte, halmazelmélete egyértelműen megcáfolja Leibniz elvét.

– Hogyan mondhatod, hogy a halmazokat az elemeik egyértelműen *meg kell hogy határozzák*, amikor másrészről azt állítod, hogy a bennünket érdeklő számok és terek *nem is határozhatók meg* egyértelműen?

Ernie makacsul ragaszkodott ahhoz, hogy alapvető metafizikai elveket nem lehet csak úgy elvetni.

Tasha pedig folytatta logikai tanulmányait, részletekbe menően megismerkedett *ZF*-fel és számos további halmazelmélettel is. Nem kis tehetségről tanúbizonyságot téve, ezekben az elméletekben és ezekről az elméletekről – tisztán formálisan – sok mindent képes volt bizonyítani. De egyik sem tűnt számára olyan értelmesnek, mint az, amellyel szülei elsőként ismertették meg.

Fordította Csaba Ferenc